

Año 2, No. 2

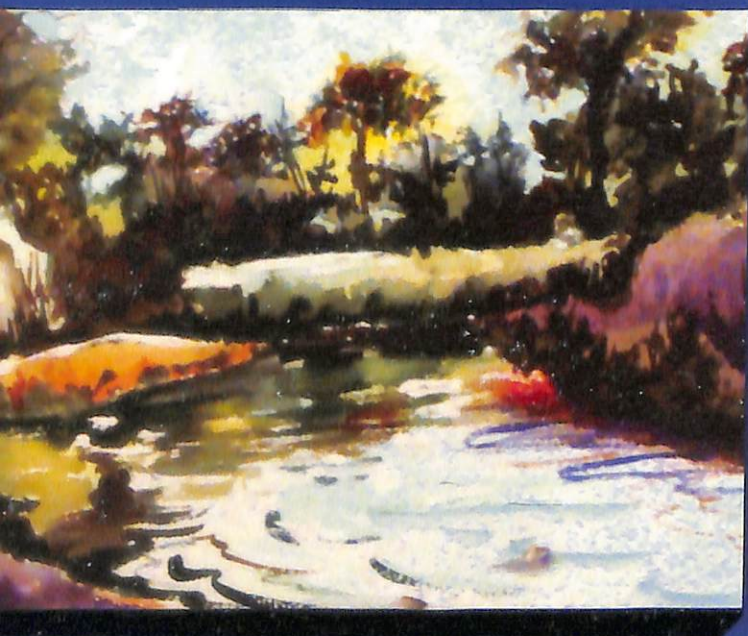
Escuela Normal Superior Farallones de Cali, abril de 2007, ISSN: 2011-4885



Revista de Educación y Pedagogía

Cuadernos del Maestro





Cuadernos del maestro

Revista de Educación y Pedagogía

Publicación semestral de la Escuela
Normal Superior Farallones de Cali

ISSN: 2011-4885

Abril de 2008 No.2 \$15.000

Director: William Rodríguez Sánchez
Comité Editorial: Luz Miriam Burbano
Carlos Grijalba, María Fernanda Mejía.
Rector: Jorge Enrique Muñoz Arce

Comité Académico y Científico:

Ligia Amparo Torres, Javier Fayad Sierra, Gloria Rincón.

Dirección: Cra 22 Oeste No. 2-65 Barrio Libertadores, Santiago de
Cali, Colombia. Teléfono: 557 46 67 - 390 10 10
E-mail: ensfarallonescali@colombiaaprende.edu.co

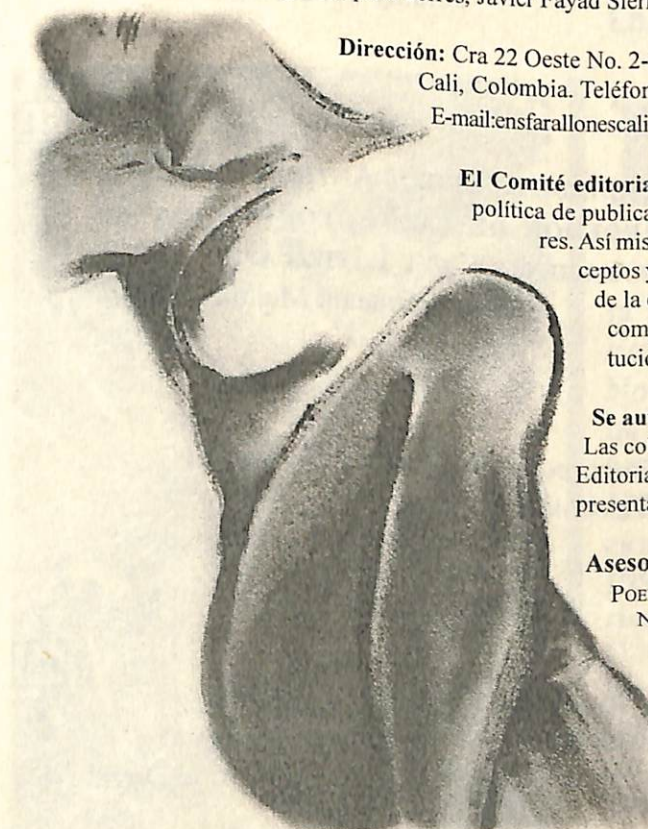
El Comité editorial se reserva el derecho de establecer la política de publicación de los artículos de los colaboradores. Así mismo, establece que las ideas, juicios, conceptos y opiniones de los artículos firmados son de la exclusiva responsabilidad del autor y no compromete la política educativa de la Institución.

Se autoriza la reproducción citando la fuente. Las colaboraciones se pueden enviar al Comité Editorial, con base en normas internacionales de presentación de artículos científicos.

Asesoría editorial e impresión

POEMIA, su casa editorial, Calle 3 Oeste
No. 18-43; Teléfono: 558 28 08, Cali, Colombia.

E-mail: lizardo@lizardo-carvajal.com
Acuarelas: Luz Ángela Pinzón; **Acuarela de carátula:** Nhora Milena Castillo; **Diseño y Diagramación:** Elizabeth Ocasiones Aguado. **Producción:** Luz Amanda Ríos.



Contenido

8

ESCRITURA Y MAESTROS
Gloria Rincón B.

16

EL LENGUAJE ESCRITO EN LA ESCUELA
Luz Miriam Burbano C.

24

**RE-VIVIFICAR LAS PRÁCTICAS DE AULA MEDIANTE EL
RE-PENSAMIENTO DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE**
Johnny Vivas Arboleda

41

**ALGUNAS REFLEXIONES DESDE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE
LO DIDÁCTICO ALREDEDOR DE LA FACTORIZACIÓN DE
POLINOMIOS DESDE UN AMBIENTE CAS Y LÁPIZ/PAPEL**
María Fernanda Mejía Palomino

52

**UNA PERSPECTIVA DE LA GESTIÓN DEL PROFESOR EN CLASES DE
MATEMÁTICAS: RETOS Y TENSIONES**
Marisol Santacruz Rodríguez

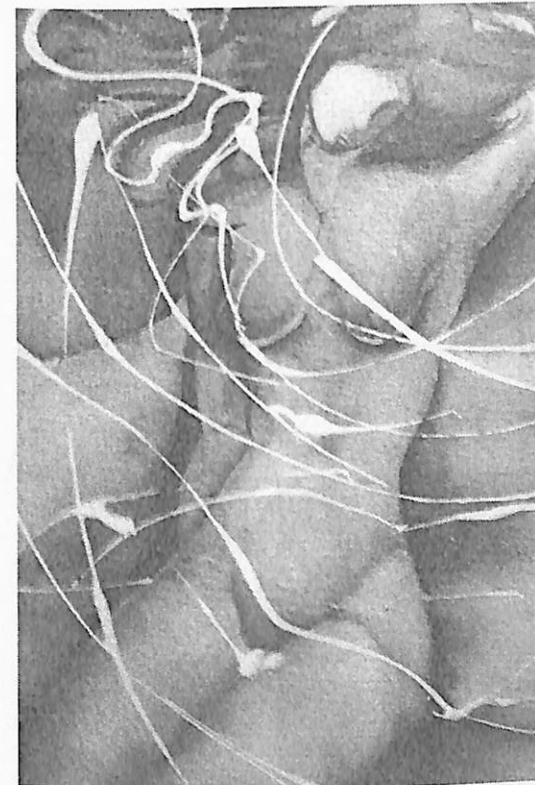
63

**LA CONVERSIÓN DE LAS REPRESENTACIONES:
UNO DE LOS DOS PROCESOS FUNDAMENTALES DEL PENSAMIENTO**
Raymond Duval

Presentación

La artista

Luz Ángela Pinzón Hoyos, licenciada en literatura y magíster en Administración, quien se desempeñó durante 25 años como rectora de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali (antigua Normal Nacional de Señoritas), ha realizado diversas exposiciones, entre las que se destacan: 1994, Centro Colombo Americano: exposición colectiva; 1995, Centro Colombo Americano: Salón de Pintores del Occidente; 1997, Hotel Intercontinental: Exposición Individual; 1998, Centro Cultural Comfenalco: exposición Individual; 2000, Hotel



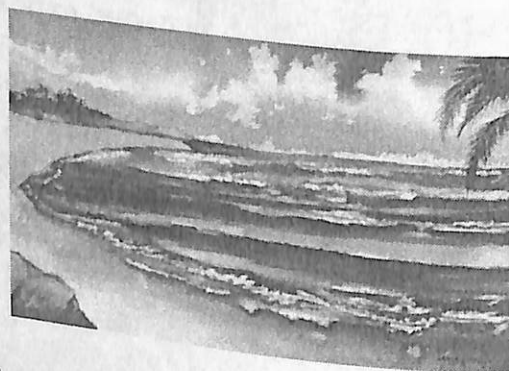
Intercontinental: Exposición Individual; y 2001, Hotel Torre de Cali: Exposición Individual.

Para la exposición de este segundo número de la revista, hemos hecho una selección de acuarelas que nos muestran la sensibilidad, agudeza y perspectiva de la artista, nos muestra el movimiento, la fluidez y la profundidad del cuerpo y la naturaleza.

Sobre las acuarelas

El cuerpo y la naturaleza, despojados de adornos superfluos, como constantes en la obra de Luz Ángela Pinzón, son objeto de permanente

búsqueda y transformación. Los referentes reales como la figura humana y los paisajes de la Guajira, mediante la composición, el uso de la acuarela, el trabajo de reservas e incorporación de elementos que enriquecen la textura, evocan la flexibilidad del movimiento y la riqueza en la expresión. Particular mención merecen la limpieza de la acuarela, que más allá de demostrar el manejo de la técnica, lo es de la sensibilidad que en ella generan la creación y terminación de su obra e, igualmente, el protagonismo de la luz, presente también en otras técnicas experimentadas por ella, a través de toda su producción.



Editorial

Esta bitácora de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, la número 2, tiene múltiples significados: el primero lo ubicamos en la insistencia en la escritura como una necesidad para los maestros y maestras que queremos reconocernos y ser reconocidos a partir de la escritura, reconociendo la complejidad del acto de escribir, las dificultades institucionales, las ortodoxias estructurales del sistema, los obstáculos culturales, los muros sociales, las históricas limitaciones pedagógicas en la enseñanza de la escritura, que hacen del trabajo de escribir algo a veces angustiante, a veces estoico, a veces incomprendido, y muchas veces inalcanzable, pero siempre reconfortante, necesario, indispensable para generar debate,

propiciar escenarios de reflexión, encuentro y producción de conocimiento.

Un segundo significado, está en la posibilidad de seguir aportando a la reflexión y discusión de los campos de la pedagogía en tanto disciplina fundante de la profesión docente, y de la educación matemática como énfasis asumido en nuestra institución. Con estos aportes asumimos conciencia, rigor y convicción que es necesario profundizar sobre ellos, pensando en los y las maestras en general que están distantes de los debates pedagógicos, y en particular en los y las maestras de matemáticas de la ciudad, la región y el país que tienen necesidad de espacios vitales para su formación y producción.

Un tercer significado de gran importancia para nosotros como comunidad académica en construcción, tiene que ver con el trabajo colectivo, pues no podemos negar que nuestra escuela colombiana aún continúa operando desde las lógicas de la industrialización; esto es, el trabajo individualizado, la agregación curricular, la homogeneización de las prácticas de enseñanza y las prácticas de aprendizaje, la estandarización de contenidos, entre otros elementos, que hacen de la formación del ciudadano del siglo XXI una quimera, en tanto incapaz de asumir la escuela los retos de un mundo globalizado, interconectado, con niveles de integración pero con profundas exclusiones, en donde el trabajo en equipo es, no solo una demanda del sector productivo, sino una necesidad imperiosa de subsistencia, producción de conocimiento y construcción de humanidad.

Entonces, como materialización de esa demanda social, cultural y sobre todo humana, en la Revista asumimos el reto del trabajo en equipo a

partir del acompañamiento a Pamela Londoño, estudiante de cuarto semestre del ciclo complementario presencial jornada de la mañana; asesoría y acompañamiento que se inició en un curso de Razonamiento matemático y que fue derivando en un acompañamiento interdisciplinar en la traducción de un texto libre de internet de Raymond Duval. Fuimos cuatro profesores(as) que acompañamos a la estudiante, con una sola condición, que el trabajo fuera de calidad, pero centrado en ella, con la seguridad de estar construyendo camino a nuevas formas de relacionarse con el conocimiento, con el otro maestro y el otro estudiante, pero sobre todo con el trabajo colectivo como apuesta de la Normal Superior Farallones de Cali.

Ahora bien, pero ¿por qué tiene relevancia estos tres significados? Primero porque las apuestas colectivas y de largo plazo en sí mismas los son, y segundo, porque ante una política nacional e internacional para la educación de las llamadas naciones en vías de desarrollo, que se centra en la estandarización, individualización y desconocimiento del saber pedagógico, es necesario, importante y prioritario asumir posturas en contravía a estas políticas que deshumanizan, mecanizan y desintegran. Aquí entonces visibilizado el reto de maestros y maestras: enfrentar las nuevas realidades económicas, políticas y sociales desde la producción intelectual, reconociéndola como un trabajo colectivo donde lo individual no se desdibuja, por el contrario se potencia en tanto posibilidad de ser cada vez más humanos.

Escritura y Maestros*

GLORIA RINCÓN B.

Profesora Escuela de Ciencias del Lenguaje Universidad del Valle

*«A las palabras se las lleva el viento.
Supongo que puede haber sido eso lo que
nos condujo hasta la escritura.
La piedra parece más perdurable.
Lo dicho está y al momento siguiente ya no
está, es puro tiempo.
La marca en la piedra está y sigue estando.
La palabra misma - o el jugo de la palabra,
mejor
dicho: la significación- encarna en ella y se
vuelve a su vez cuerpo sólido y
perseverante, menos fugaz que la voz, más
capaz de derrotar al tiempo.
Una conquista de la inmortalidad en cierto
modo».*

Graciela Montes¹

* Se asume el genérico «Maestro» conscientes de que la realidad del magisterio, incluye la diversidad masculina y femenina. Nota del Director.

¹ Montes, Graciela (1999) «De lo que sucedió cuando la lengua emigró de la boca», Ponencia presentada en Bogotá, en el marco de un Congreso de lectura.

¿Ser maestro es condición suficiente para ser productor de textos? ¿Es válida la afirmación de que los maestros no leen ni escriben? ¿Cómo se puede fomentar la producción de textos entre los maestros? Estas y otras preguntas similares son el objeto de este texto, en el que voy a referirme al lugar de la escritura en la formación y en la acción de los maestros.

Este tema ha habitado mis búsquedas investigativas y de innovación educativa tanto en el diseño de prácticas pedagógicas para los niños y jóvenes como para la formación de docentes, debido a la alta valoración de la práctica de la escritura, al convencimiento en su importancia como herramien-

ta intelectual para resignificar el saber docente y a la conciencia de las dificultades que para ejercerla arrastramos muchos de los que nos desempeñamos como maestros, así como también a la certeza de que es posible mejorar, avanzar en nuestra formación como escritores a través de situaciones caracterizadas por la cooperación en la situación de producción y la valoración de los escritos bien con función comunicativa, terapéutica o epistémica.

Como ya muchos han dicho, «escribir es más fácil si uno tiene algo que decir». En este caso, parto de la revisión de algunos trabajos que han abordado este tema, tales como el de la mexicana Elsie Rockwell² y el colombiano Luis Bernardo Peña³, mis propias exploraciones⁴, y también, me atengo al poder heurístico, transformador de la escritura y por eso, enfrento la escritura de este artículo

² Rockwell, Elsie (1995) «Los usos magisteriales de la lengua escrita» En Nueva Antropología Vol. XII No. 42, México.

³ Peña, Luis Bernardo (2003) «La escritura como una forma de reivindicar el saber de los maestros». En «La investigación - acción pedagógica: experiencias y lecciones. Rafael Ávila Penagos (Compilador), Ediciones Antropos, Bogotá.

⁴ Rincón, Gloria. «Tarea: hacer un resumen ¿Y los maestros saben hacerlo?» en «Entre la lectura y la escritura». Colección mesa redonda, editorial magisterio. Compiladores: Guillermo Bustamante y Fabio Jurado, Bogotá. Otro trabajo es: «El maestro como lector y productor de textos» (2005) Módulo 1 del Programa de Mejoramiento docente en Lengua Materna, Universidad del Valle, Cali.

como un acto de descubrimiento, para, como dice Edward Albee «encontrar lo que estoy pensando».

Voy a hablar de escritura, pero no de modo general. Mi referente es aquella escritura que se hace para contribuir a comprender el saber de los maestros, aquella que, como herramienta intelectual de primer orden, ayuda a reconstruir la experiencia, a tomar distancia de ella para reflexionarla, comprenderla y por esta vía transformarla, enriquecerla.

En otras palabras, la escritura presente en sistematizaciones de experiencias, en artículos especializados sobre la enseñanza, en las ponencias de eventos y en general en textos dirigidos a maestros.

¿Por qué darle importancia a las prácticas escriturales en la formación de los maestros?

La escritura alfabética es una tecnología con múltiples implicaciones en la vida social, así no todos sus miembros la apropien y utilicen en igual medida. Estas implicaciones tienen que ver con su utilización tanto para hacer posible el sometimiento del otro, como con su gran poder de liberación en tanto abre la posibilidad de conocimiento y diálogo sin las barreras del tiempo y la distancia. A través de la lectura accedemos a otros mundos no imaginados. Cuando escribimos, ponemos en diálogo nues-

tro ser con otros, nos «desnudamos» pese a la incertidumbre de cómo nos asumen los otros, cómo nos ven y cómo nuestras certezas se erosionan, de todos modos, nuestra identidad se despliega, nos trasciende.

Así, la escritura abre la puerta al diálogo, nos permite darnos a conocer y reconstruirnos; dejarnos afectar por personas que muy probablemente, nunca veremos, pero con quienes nos estamos comunicando... En palabras de W. Ong⁵ «más que cualquier otra invención particular, la escritura ha transformado la conciencia humana» en cuanto pone distancia en el tiempo y en el espacio, en la comunicación, permitiendo a la conciencia una reflexión distinta sobre lo enunciado, generando un mundo artificial «posible» que propone al lector y en el que éste se inscribe en la medida en que penetra en el texto; la escritura adquiere así un papel fundamental en la construcción de la noción de objetividad.

En este contexto, la institución escolar es fundamental para garantizar el desarrollo del conocimiento y por ende, de la escritura. «Escritura y escuela producen seres humanos funcionalmente escolarizados, que organizan su pensamiento desde la escritura, aún en el momento en que hablan. Son ellos los futuros

portadores y productores del conocimiento, de la ciencia, de la verdad, que solo es posible alcanzar con procesos formales de aprendizaje».

¿Si enseñanza y escritura están tan ligadas, por qué afirmar que los maestros no escriben?

Efectivamente, al situarnos en el marco antes definido, tal vez para algunos suene raro plantearse como problemática la relación escritura-labor docente. Si se acepta que la escuela en general —en comunidades con cultura escrita— es vista como un espacio donde el contacto con el lenguaje escrito es permanente, donde no se concibe su existencia o su permanencia y avance en ella sin poseer un dominio del lenguaje escrito, ¿cómo poner en duda el desempeño de los maestros como lectores y productores de textos?

Referirnos a un maestro como lector o productor de textos nos mueve a pensar en una persona que está de manera permanente en el uso de la lectura y la escritura, que éstas constituyen prácticas cotidianas que se asumen con una actitud crítica y dinámica, en otras palabras, que es un usuario de lo escrito, que consulta y en diversas fuentes, que confronta y expone diversas versiones de cada tema porque le interesa construir una relación más reflexiva y amplia del objeto que estudia porque quiere que sus estudiantes logren esta-

blecer una representación adecuada o una relación más completa de aquello que los convoca.

Pareciera pues, que la labor pedagógica es impensable de ser ejercida por un o una docente que no sea lector (a) y productor (a) de textos. Sin embargo, como intentaremos mostrar, lo que se comprende por lenguaje escrito en el contexto escolar ha estado estrechamente ligado a la cultura del contexto escolar, a las prácticas comunicativas dominantes en este contexto y a las concepciones que sustentan el cómo se aprende y por lo tanto, el cómo se enseña.

Además, pese al desarrollo teórico e investigativo y a pesar de estar sustentada en prácticas comunicativas escritas, la escuela enfrenta graves problemas en relación con el desarrollo de la comprensión y producción escrita no sólo de los estudiantes, sino también de los maestros y maestras, como lo reflejan diversas evaluaciones e investigaciones. Esta contradicción ha recibido diversas explicaciones y propuestas de solución: Una muy frecuente es la del dedo acusador de autoridades educativas, de evaluadores y medios de comunicación que afirman: «los maestros no leen», «los maestros no saben escribir», por tanto «qué se puede esperar de los estudiantes...» Otra, desde una orilla diferente, son los resultados de investigaciones y experiencias comprometidas con la comprensión y por

esta vía, la transformación de las condiciones escolares. Desde esta otra orilla se relativizan esas afirmaciones.

Es posible mostrar otra cara de esa realidad cuando, más que acusar y plantear culpabilidades, se hace un análisis de la complejidad de esta problemática incluyendo en ella aspectos como los siguientes:

- Analizar las culturas magisteriales y las 'condiciones materiales de trabajo' de los docentes, es decir, establecer relaciones entre la práctica de la lectura y la escritura con las condiciones materiales en las que ella se favorece o no.
- Articular las prácticas culturales con el análisis de las estructuras y situaciones sociales, para no hacer evaluaciones en el vacío o descontextualizadas.
- Tener en cuenta los significados mutables y contrastantes que pueden tener ciertos saberes y prácticas cuando se articulan desde distintos contextos culturales.
- Asumir la «vigilancia epistémica» que deben tener quienes investigan sobre los referentes culturales cuando estudian a los otros.

Las condiciones de doble jornada de trabajo que por razones salariales tienen muchos maestros de básica, el alto costo de los libros, la escasa exis-

⁵ Ong, Walter (1987) «Oralidad y escritura», Fondo de Cultura Económica, México.

tencia de bibliotecas públicas y sus horarios de servicio, son sólo algunos de los factores que no facilitan el acceso y la calidad de la lectura y la escritura.

Como lo muestra la investigación de Rockwell (1995) y el trabajo monográfico de Muñoz y Ortiz (2003)⁶, los manuales escolares son los materiales de lectura que más frecuentan los maestros, seguido de algunos materiales recomendados por colegas, que se caracterizan porque incluye actividades prácticas posibles de integrar a la labor pedagógica y porque, además, tienen un potencial uso oral de lo escrito.

En relación con la escritura, en el mundo docente las experiencias con la producción de textos escritos están vinculadas con exigencias institucionales: la escritura no es una necesidad profesional, una práctica formativa permanente, una actividad que se lleve a cabo de modo espontáneo, creativo y lúdico, condiciones que enriquecen su existencia. Como vemos, para el fomento de la producción escrita las condiciones no son las mejores. En el trabajo docente es frecuente la copia desde los manuales: «Pocas veces se requie-

re del maestro una redacción «libre», como la que se espera de los alumnos... tal vez sólo para las ceremonias cívicas» (Rockwell). Como sabemos todos los que hemos sido docentes, la mayoría de las situaciones de escritura que se nos proponen están ligadas al contexto burocrático, es decir a la obligación de llenar documentación escolar (formularios).

En ocasiones se solicita a algunos maestros, por parte de las autoridades educativas, producir documentos para sus colegas. En estos casos, se esperan textos en los que predomina la prescripción y la necesidad de copiar más que la de ser original o polémico y, además, la autoría es alienable, es decir, las autoridades educativas que dieron la comisión son las que figuran como autores.

Como se puede notar, en la labor docente cotidiana no se dan condiciones para favorecer la escritura en sus funciones comunicativa, expresiva o cognitiva. Es necesario tomar en cuenta estas condiciones si lo que se desea es generar relaciones más dinámicas y creativas con la lectura y la escritura en la labor docente. Como dice Rockwell (1995) «No se trata de avalar lo que existe; es posible desentramar aquellas prácticas que son parte sustancial del trabajo del maestro, de las que son resultado de un contexto burocrático que obstaculiza, en lugar de propiciar, la apropiación de la lengua escrita».

¿Cómo fomentar entonces, las prácticas de escritura, con toda su potencialidad, en la labor docente?

Como puede leerse en el libro que recoge las conclusiones del III Encuentro latinoamericano de la «RED para la transformación de la formación docente en Lenguaje»⁷, resulta bastante complejo enseñar aquello que nunca se aprendió ni se dominó. Por ello, para ser un buen docente de lengua (y en general maestro, porque ¿qué no está atravesado por el lenguaje?) se debe haber vivenciado de manera grata y competente la construcción de los procesos de lectura y escritura. Sólo quien se ha enfrentado a la tarea de la escritura (no de copia) con toda la complejidad que ella entraña, tiene la experiencia y sensibilidad de darse cuenta de las dificultades que otro puede estar enfrentando ante esta práctica así como también puede estar en la posibilidad de proponer caminos alternativos, estrategias efectivas, diálogos iluminadores para continuar y superar los obstáculos.

En este sentido, creemos que haber participado de una experiencia motivante y significativa como lector y productor de textos puede ser

para él o la docente el apoyo fundamental para decidir acciones, actividades y prácticas que contribuyan a orientar a quienes se inician en este camino. No lo aseguramos tajantemente, porque como antes dijimos, la labor pedagógica es compleja y en ella se cruzan muchos factores.

Si bien no tenemos totalmente armado el rompecabezas que muestra la solución para que la escritura cobre en la vida de los maestros el lugar privilegiado que debería tener, no compartimos las respuestas que, a veces, suelen darse:

- Una, argumentar que esas competencias ya debieron adquirirse y si no se han logrado es porque debe haber problemas insuperables. Mejor dicho, inada se puede hacer!
- Otra, que es responsabilidad de cada maestro resolver este problema «como pueda» porque es una condición previa para ser profesor.
- Tampoco estamos de acuerdo con ignorar nuestro papel en la solución de este problema. Por el contrario creemos que, además de reconocer las carencias, hay que enfrentar el desafío de llevar a cabo diferentes acciones y programas que contribuyan a mejorar las competencias que tenemos como lectores y productores de todo tipo de textos. Estamos segu-

⁶ Muñoz, María Lucía y Ortiz, Carmen Rosa (2003) «Autobiografía y cambio en las representaciones sobre lo que es enseñar a leer y escribir en primer grado» Monografía presentada para optar el título de Especialistas en la Enseñanza de la Lectura y la Escritura, Universidad del Valle, Cali.

⁷ RED PARA LA TRANSFORMACIÓN DE LA FORMACIÓN DOCENTE EN LENGUAJE (2001) «La formación docente en América Latina». Colección REDES, Editorial Magisterio, Bogotá.

ros de que estas experiencias permitirán a los maestros llegar a ser practicantes activos y eficientes que relacionan vivencias académicas gratas con la lectura y la producción de textos.

El proceso de formación o autoformación en la escritura requiere que se desarrolle la capacidad para relacionarse de manera ágil y flexible con los más diversos textos, que se evidencie el dominio de competencias lingüísticas y socio-discursivas tanto cuando se ejerce el rol de mediador en los procesos de aprendizaje de sus alumnos como cuando se ejerce el rol de escritor.

Es prioritario que mantengamos la coherencia en el proceso formativo para que al mismo tiempo que renovamos nuestros esquemas sobre las maneras como abordamos los textos, vayamos construyendo una visión propia de los procesos de lectura y escritura y, en este sentido, vayamos generando los criterios suficientes para guiar a los alumnos en estos caminos. Así, poco a poco, podremos ir entendiendo las dificultades que se presentan (en nosotros y en ellos) y propiciando las acciones que permitan resolverlas (a nosotros y a ellos).

Ahora bien, como el problema no es sencillo, no hay fórmulas mágicas, ni soluciones hechas. La discusión y los aportes generados en los

encuentros de la RED para la transformación de la formación de docentes en lenguaje nos indican que la lectura y la escritura adquieren una auténtica significación didáctica cuando por medio de su práctica regular y a través de procesos auto-socio-constructivos, son parte del proceso de formación docente. Esta formación se plasma en cuatro dimensiones a saber:

- El descubrimiento personal del placer y del poder que, en el contexto de la vida cotidiana, entrega una relación ágil y flexible con los más diversos textos.
- La adquisición y desarrollo de competencias lingüísticas que el propio docente debe manejar como usuario de una lengua.
- El rol mediador del formador en los procesos de aprendizaje de sus alumnos.
- La lectura y la producción escrita, promotoras y coadyuvantes del desarrollo social, cognitivo y afectivo del profesor.

También, como manifiesta Luís Bernardo Peña: «Darle importancia a la escritura de los maestros significa reconocer que tienen cosas importantes que decir y valorar sus formas propias de conocimiento». Buscando modos de lograrlo, agrega: «Los maestros sólo se motivan por escribir cuando descubren que la escri-

tura está profundamente conectada con su vida, surge de ella y a ella regresa».

Nos ratificamos en este planteamiento porque consideramos que el aprendizaje de la lectura y la escritura son procesos continuos y progresivos que están en permanente desarrollo desde la infancia hasta la edad adulta. «Y las competencias lingüísticas no son un cuerpo acabado sino que se siguen construyendo en tanto haya instancias de problematización en función de las múltiples necesidades situadas y contextualizadas de los usuarios de una lengua» (RED, 2002). En otras palabras, nunca acabamos de alfabetizarnos dado que éste es un proceso, no un estado. En este proceso, como dice Emilia Ferreiro⁸, asumimos «un continuo de desafíos cada vez que nos enfrentamos con un tipo de texto con el cual no hemos tenido experiencia previa». En un momento dado uno puede sentirse capaz de desempeñarse adecuadamente con los textos con los que está en contacto permanente. Sin embargo, si entra a participar en una nueva experiencia (por ejemplo, iniciar un postgrado), es posible que le toque leer, producir o referirse a otros textos «nuevos», poco frecuentes,

que de entrada se ven como «enredados». En esos momentos, uno se siente como si fuera analfabeta: conoce las letras pero, a pesar del esfuerzo que se hace, no se entiende lo que dicen.

Lo anterior es sólo un ejemplo de que leer y escribir no siempre se hacen igual y que si se sabe leer o escribir un determinado tipo de texto esto no es garantía de que se pueden comprender y producir todos. Necesitamos pues, estar en contacto permanente con la mayor diversidad textual y en continua formación como lectores y escritores. Necesitamos también que las condiciones en que se desarrolla la labor docente revaloricen el papel de la escritura, que en este espacio profesional escribir sea «una invitación a expresar aquello que les resulta significativo (a los maestros), porque lo tienen muy cerca del corazón o de la piel, o porque ha representado una conquista, un fracaso, una búsqueda, una pregunta sin resolver todavía. Es muy difícil motivar a alguien a escribir si no se le permite que su escritura aflore de esta veta profunda donde reside el sentido» (Peña, 2003). La creación y consolidación de una revista, como ésta de la Normal Farallones que tiene usted en sus manos, es una de las alternativas para concretar esta apuesta por la profesionalidad de la labor docente.

⁸ Ferreiro, Emilia (1997) «Pasado y presente de los verbos leer y escribir» Fondo de Cultura Económica, México.

El Lenguaje Escrito en la Escuela

LUZ MIRIAM BURBANO C.

«La acción educativa es entendida (...) como una práctica de interacción simbólica, de intercambio y reconstrucción cultural, de construcción de sentido, mediada fundamentalmente por el lenguaje»¹.

Al interpretar la anterior cita, se podría decir que la Escuela tiene el compromiso de permitir a sus educandos el acceso al lenguaje significativo, particularmente al lenguaje escrito. Ahora bien, para que esto sea posible es necesario trascender las prácticas pedagógicas que parten del trabajo sobre el sistema formal del lenguaje, para luego llegar a la comprensión del mismo.

Sin embargo, a pesar del anterior planteamiento sobre el trabajo con el lenguaje significativo, que data desde hace diez años aproximadamente, aún se escucha decir a los maestros de los diferentes niveles educativos, que los estudiantes, en su gran mayoría, presentan dificultades de lectura y escritura. Es

decir, incapacidad para interpretar, para expresar por escrito lo que piensan, para argumentar, para sustentar, para organizar...

Por otro lado, los estudiantes se sienten desmotivados por estas actividades. No le encuentran sentido y cuando leen o escriben lo hacen por cumplir con la tarea, mas no porque consideren necesario este aprendizaje.

Desde este panorama reconocemos una relación muy estrecha entre las dificultades de lectura y escritura y los obstáculos de aprendizaje en las diferentes áreas del conocimiento y del comportamiento estudiantil.

Es necesario que la Escuela, como institución educativa, entienda la complejidad de leer y escribir. Ambas son actividades que están relacionadas con el conocimiento, la comunicación, la ética y la estética para comprender la vida.

En la escuela, por lo general, la escritura no sólo se ha desvinculado de la lectura, sino que se ha reducido a aprender reglas ortográficas y a tener buena caligrafía y «redacción».

Generalmente la enseñanza de la escritura se limita a la copia de modelos sin ningún tipo de reflexión, a resolver cuestionarios a partir del descifrado de textos escritos, a repetir conceptos gramaticales.

Todo lo anterior desligado de situaciones comunicativas. Por eso es importante que nosotros los maestros, como profesionales de la educación, cuestionemos y replanteemos nuestro quehacer pedagógico, concibiendo alternativas de trabajo acorde con las necesidades e intereses de los estudiantes y con los avances investigativos que en este campo se dan continuamente.

Alrededor del problema de la enseñanza y del aprendizaje de la lectura y la escritura se han desarrollado diversas investigaciones desde la Psicología, la Lingüística, la Psicolingüística, la Filosofía, la Sociología entre otras, a nivel mundial, nacional y regional.

Relacionaré algunas investigaciones de corte psico-genético, que han aportado a las diferentes disciplinas pero, especialmente, a la pedagogía del lenguaje.

Los sistemas de escritura en el desarrollo del niño, 1979; *Nuevas perspectivas sobre los procesos de lectura y escritura*, 1982, investigaciones realizadas por Emilia Ferreiro, Ana Teberosky y otros. En estos trabajos se muestra cómo el niño construye el sistema de escritura y se supera el concepto de escritura y lectura como actividades meramente motrices y mecánicas. Las autoras, con estas investigaciones, revolucionan las prácticas pedagógicas tradicionales, pues logran demostrar que el lengua-

¹ Tomado de M.E.N «Lineamientos Curriculares Lengua Castellana» p.29, editorial magisterio, Bogotá, 1998.

A nivel regional tenemos la investigación que iniciamos en 1985, un grupo de ocho maestras oficiales, lideradas por Gloria Rincón, en el contexto del Movimiento Pedagógico que, en ese momento, se gestaba en el interior del CEID, Centro de Estudios e Investigaciones Docentes, capítulo del Sutev,

Otros trabajos de investigación que hacen referencia a tipologías especiales como el *resumen* y los *textos expositivos*, son cómo enseñar a los alumnos de grados medios a resumir el contenido de los libros de textos de Bárbara Taylor, cómo trabajar la idea principal; el resumen de Eloy Martos y Otros; cómo revisar los Textos, de Joan Sempere, *el texto Expositivo*, compilación de K. Denise Ruth; *Estrategias de lectura*, de Isabel Solé y los *Textos expositivos* de Juan Sánchez Enciso.

En el proceso de aprender se producen equilibrios y des- equilibrios cuando se da la confrontación entre lo que el sujeto considera su saber y el saber que propone la comunidad científica.

En el ámbito escolar es importante crear espacios para el reconoci-

miento de los saberes de los estudiantes. Esto se logra a través de la exploración de conocimientos, la discusión y confrontación organizada y respetuosa de los diferentes puntos de vista.

Otro aspecto importante, que propicia un ambiente para el aprendizaje, es el trabajo en equipo donde se posibilita el intercambio de manera más cercana con el compañero, la participación activa y democrática, la confrontación mutua, el aprender y enseñar, el asumir el papel de líder o integrante activo, donde se desarrollen lazos de solidaridad y compañerismo. Desde el trabajo en equipo, el error pasa a ser objeto de reflexión y reconstrucción de los saberes, venciendo el miedo a equivocarse y reconociendo los diferentes ritmos de aprendizaje.

El rol del maestro en esta propuesta de trabajo es fundamental, porque puede obstaculizar o ayudar a avanzar el proceso de aprendizaje de los estudiantes. Por lo tanto, el maestro que intente implementar una propuesta de trabajo, debe tener una actitud investigativa, una formación permanente, saber observar, interrogar y concertar. También debe tener en cuenta los intereses y necesidades personales y académicas de los estudiantes. Debe, así mismo, asumir el error como parte del proceso de aprendizaje y de esta manera convertirlo en objeto de reflexión y análisis.

Los contenidos se organizan en conceptuales, procedimentales y actitudinales

Contenidos conceptuales

Son los relativos al conocimiento del tema en sí, teniendo en cuenta las necesidades de los educandos y los *estándares de calidad* para lengua castellana que presenta el MEN como punto de referencia.

Contenidos procedimentales

Son los que permiten el análisis, la comprensión y la producción oral y escrita de diferentes tipos de textos. Permiten la reflexión sobre la diferencia que existe entre los textos expositivos y literarios en su intención comunicativa.

Los contenidos actitudinales

Promueven en los estudiantes actitudes críticas ante la lectura y la producción escrita de diferentes tipos de textos. Orientan el uso de la palabra oral ante un grupo, el respeto por opinión del otro, el valor del error como un punto de vista que se debe escuchar y confrontar con argumentos de manera respetuosa. Esto como un elemento importante para la integración social. También incide en el desarrollo de destrezas cognitivas que permiten abordar el conocimiento y el sentido de la producción de textos escritos para acceder a la información que se necesita.

La estrategia

Es un medio para acceder al conocimiento. Permite la planificación de la tarea general y su propia ubicación, motivación y disponibilidad ante ella. Esto facilita la comprobación, la revisión y el control de lo que se lea, se escriba, se hable y la toma de decisiones adecuadas en función de los objetivos que se persiguen.

La primera estrategia de trabajo que se plantea es la *exploración inicial de los saberes con respecto al tema objeto de estudio*. Una vez escogidos los temas de interés personal o académico por parte de los estudiantes y del maestro o maestra, se proponen estrategias que tengan en cuenta *los cuestionamientos* que, según Isabel Solé (1993) en la lectura, plantean al lector la posibilidad de comprender lo que se lee:

- *Comprender los propósitos implícitos y explícitos de la lectura*. Esto equivale a responder:

¿Qué tengo que leer? ¿Por qué y para qué tengo que leerlo?

- *Activar y aportar a la lectura los conocimientos previos pertinentes al contenido que se trata*:

¿Qué sé acerca de los contenidos afines que me puedan ser útiles?

¿Qué otras cosas sé que puedan ayudarme, acerca del autor, el género, del tipo de texto?

- *Dirigir la atención a lo que resulta fundamental en detrimento de lo que puede parecer trivial, en función de los propósitos que uno persigue*:

¿Cuál es la información esencial que el texto proporciona y qué es necesario para lograr mi objetivo de lectura?

¿Qué informaciones puedo considerar poco relevantes, por su redundancia, por ser de detalle, por ser poco pertinente para el propósito que persigo?

- *Evaluar la consistencia interna del contenido que expresa el texto y su compatibilidad con el conocimiento previo y con lo que dicta el sentido común*:

¿Tiene sentido este texto?

¿Presentan coherencia las ideas que en él se expresan?

¿Discrepa abiertamente de lo que yo pienso, aunque sigue una estructura argumental lógica?

¿Se entiende lo que quiere expresar?

¿Qué dificultades plantea?

- *Comprobar continuamente si la comprensión tiene lugar mediante la revisión y recapitulación periódica y la auto-interrogación*:

¿Qué se pretendía explicar en este párrafo, apartado o capítulo?

¿Cuál es la idea fundamental que extraigo de aquí?

¿Puedo reconstruir el hilo de los argumentos expuestos?

¿Puedo reconstruir las ideas contenidas en los principales apartados?

¿Tengo una comprensión adecuada de los mismos?

- *Elaborar y probar inferencias de diverso tipo, como interpretaciones, hipótesis, predicciones y conclusiones:*

¿Cuál podrá ser el final de este texto?

¿Qué sugeriría yo para solucionar el problema que aquí se plantea?

¿Cuál podría ser tentativamente el significado de esta palabra que me resulta desconocida?

¿Qué le puede ocurrir a este personaje?

Para finalizar se podría decir que una propuesta pedagógica que aborde el lenguaje significativamente tendría que tener en cuenta el trabajo por proyectos, que «tiene como propósito ser una herramienta para el aprendizaje, un modelo de desarrollo de los currículos escolares, lo cual incluye contenidos actitudinales, conceptuales y procedimentales»².

Bibliografía

- BUSTAMANTE Z. Guillermo y otros. *Juguemos a interpretar*. Plaza y Janés, Bogotá 1998.
- BURBANO, C. Luz Miriam. *Estímulo de la creatividad Narrativa en el niño escolar* Univalle, Cali, Col. 1984.
- CASSANI, Daniel. *Procesos de redacción en Leer y Escribir*. Cuadernos de pedagogía, Madrid, 1993.
- CASTORINA, José Antonio y otros. *Psicología Genética*. Niño y Dávila Editores, Buenos Aires, 1988.
- FERREIRO, Emilia. *Pasado y presente de los verbos Leer y Escribir*. Fondo de cultura económica Argentina 2005.
- Haceres Quehaceres y Deshaceres con la lengua escrita en la escuela primaria. *Libros del Rincón*. Méjico 1994.
- INESTROZA Gloria. *Aprender a formar niños lectores y escritores*, UNESCO/Dolmen Ediciones, Chile 1996.
- JOLIBERT Josette, *Formar niños productores de textos, Formar niños lectores de textos*, Editorial Hachette, Chile 1991. *Interrogar y Producir Textos auténticos: vivencias en el aula*, Dolmen estudio 1998. Chile.
- KAUFMAN Ana María, *No es bueno que una letra este sola*, Buenos Aires, Argentina. Fotocopia.
- PENAC Daniel, *Como una novela*, Grupo editorial Norma 1995, Bogotá, Colombia.
- RODARI Gianni. *Gramática de la fantasía. Reforma de la escuela 1974*, Solé Isabel. *Lectura y estrategias de aprendizaje en Leer y Escribir*, Cuadernos de pedagogía, España 1993.
- TEBEROSKY Ana, *Leer para enseñar a escribir en Leer y Escribir*. Cuadernos de pedagogía, España 1993.
- VACCA Jorge, *Ortografía y Significado*. Revista Lectura y Vida. Buenos Aires, Argentina.
- GÓMEZ Palacio Margarita y otros, *Propuesta para el aprendizaje de la Lengua escrita* Secretaría de Educación Pública de Méjico, 1984.
- DOLZ Joaquín, *La argumentación en Leer y Escribir*. Cuadernos de pedagogía, España 1993.
- RINCÓN B, Gloria, *El trabajo por proyectos y la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje escrito* #3, Escuela de ciencias del lenguaje, Univalle, Cali, Colombia.
- MARTOS Núñez Eloy y otros, *Cómo trabajar la idea principal: el Resumen en Leer y Escribir*. Cuadernos de pedagogía, España 1993.
- Ministerio de Educación Nacional, - *Lineamientos Curriculares Lengua Castellana*. Editorial Magisterio, Bogotá Colombia, 1998.

² Rincón Bonilla Gloria «El trabajo por proyectos y la enseñanza y el aprendizaje del lenguaje escrito en la educación primaria» No. 3 Universidad del Valle. Cali,

Re-Vivificar las prácticas de Aula mediante el Re-Pensamiento de la Enseñanza y el Aprendizaje

JOHNNY VIVAS ARBOLEDA
Universidad del Valle, Cali.

Introducción

Este trabajo se inscribe en el marco del Proyecto Asesoría y Acompañamiento de la Universidad del Valle, en la Acreditación de Alta Calidad¹ a una institución de educación secundaria del Valle del Cauca.

Triple es el objetivo que perseguimos con este escrito:

¹ En el proyecto en mención éste servidor hace parte del equipo de asesoría y acompañamiento de Universidad del Valle desempeñándose como asesor psicopedagógico.

- Formular una propuesta pro-mejora de las prácticas de aula.
- Fundamentar el sentido de nuestra propuesta desde la orientación teórica vygotskiana², la psicopedagogía y el asesoramiento psicopedagógico.
- Describir una experiencia de asesoramiento psicopedagógico llevada a cabo en la institución que asesoramos.

² El énfasis de éste trabajo en la teoría vygotskiana responde a mi participación como ponente en el «Seminario Modelos Pedagógicos: Trascendencia del Pensamiento y la Obra de Vygotski» realizado el 9 de abril de 2007 en la institución que venimos asesorando para la acreditación de alta calidad. Para esta misma institución en noviembre de 2006 elaboré el trabajo «Vida, pensamiento y obra de Liev Semionovich Vygotski» (inédito).

Definición de cada objetivo

- Con la *propuesta* invitamos a los docentes de educación básica y media –y quizá universitaria– a la revisión-reflexión-análisis de sus prácticas de aula, toda vez que se quiera tener un conocimiento cercano de lo que ocurre en esas prácticas para conducirlas con deliberación y conciencia en la idea de re-vivificar las prácticas de aula mediante el re-pensamiento del aprendizaje y la enseñanza, mediante la «reflexión en la acción y el conocimiento en la acción», como lo sugiere Schön (1992).

Los siguientes elementos que integran la propuesta y que interactúan-convergen a mejorar aprendizaje-enseñanza-proceso escolar, son:

- Impulsar la práctica inicial
 - Observar la práctica
 - Estudiar la práctica
 - Programar la práctica.
- Con el *marco de referencia* buscamos incidir en los docentes en la toma de conciencia sobre la importancia de vincular a nuestras prácticas la revisión teórica, toda vez que la teoría nos permite enriquecer esas prácticas, impulsarlas, re-vivificarlas, además de fundamentarnos, «entender los fenómenos» (Bruner, 1960) y ejercer con mayor acierto «avanzando con una teoría»

(Karmiloff-Smith e Inhelder, 1981). El marco responde a esta otra cuestión: revisión de la orientación teórica vygotskiana, la teoría psicopedagógica y modelos de asesoramiento psicopedagógico para fundamentar, por un lado, la propuesta que formulamos y, por otro, la experiencia de asesoría psicopedagógica realizada en la institución que acompañamos en la acreditación.

- Finalmente, con la *experiencia* de asesoramiento psicopedagógico señalamos un ejercicio práctico sobre el particular y algunos logros-dificultades en la aplicación de los modelos de asesoramiento colaborativo entre docentes-alumnos-asesor en la solución de necesidades y problemas de aula, dejando entrever que «media una distancia entre lo que prescribe la teoría y lo que describe la práctica» (Sánchez, 1995, 2000 y 2001).

Propuesta: Re-Vivificar las prácticas de aula³

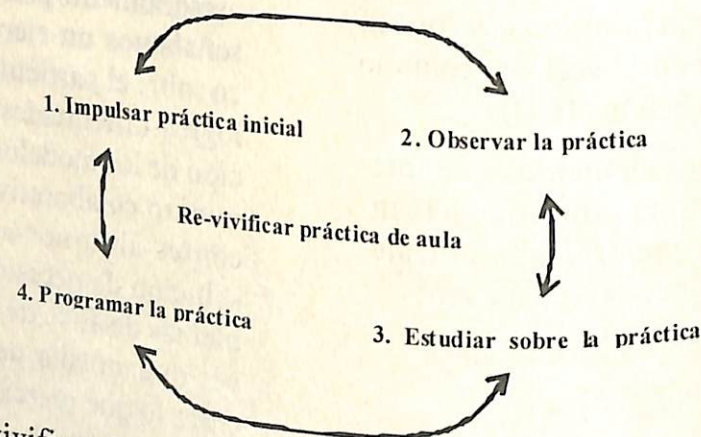
El inicio de muchas prácticas tiene impulso creativo. La mitad de mu-

³ Esta propuesta tiene dos antecedentes inmediatos: 1. Los trabajos de investigación y asesoramiento realizados con profesores de primaria y secundaria en Cali y Bugalagrande; 2. Mi propia experiencia docente en la educación básica, media y universitaria.

chas prácticas se vuelve azarosa. Al final de muchas prácticas se actúa por inercia. A menudo, sin proponérselo, nuestra práctica de aula suele transcurrir de éste modo. Luego, si la experiencia madura al maestro ¿por qué llegamos al azar, a la inercia o a la simpleza en los procesos de enseñanza-aprendizaje? Múltiple es la respuesta. Entre otras, que estamos preocupados o envueltos en eventos de mayor relevancia. Se ar-

guye, en último caso, que nos estamos «preparando» para mejorar la práctica. Queda hecha la salvedad. En cualquier caso, formulamos la siguiente propuesta en el interés de auto-reflexionar sobre nuestro quehacer profesional docente, aún bajo el riesgo de enfrentar críticas como ésta: «lo difícil no es hacer una propuesta, sino su desarrollo efectivo» (Sánchez, 2000 y 2001). La figura 1 sintetiza nuestra propuesta:

Figura 1: Proceso interactivo para Re-vivificar las prácticas de aula.



Con «Re-vivificar las prácticas de aula» queremos significar dar nueva vida al proceso de enseñanza-aprendizaje o dar impulso a nuestras prácticas de aula, al modo cuando iniciamos cualquier actividad de interés y sentido. Se trata de re-animar el ejercicio docente retornando al impulso inicial de la práctica, a la observación de la práctica, al estudio de la práctica y a la programación de la práctica para promover el desarrollo socio-cultural y cognitivo-afecti-

vo de los alumnos más allá de la acción por la acción.

Se propone un proceso circular y de doble vía que converge a re-vivificar la práctica de aula toda vez que se quiera dimensionar el sentido e implicación del acto pedagógico, del acto educativo, del acto didáctico mediante la reflexión y la acción. A continuación señalamos, a brevedad, los componentes de la propuesta, sus relaciones y convergencia.

Impulsar la práctica inicial

La meta en este componente de la propuesta es: si toda práctica inicial tiene impulso creativo ¿por qué no mantener ese impulso creativo durante todo el proceso escolar? Se trata de evitar que el proceso escolar se vuelva azaroso y de actuación por inercia. Mejor: se sugiere mantener el interés diario, el impulso y la iniciativa de empezar una nueva actividad en las aulas.

Observación de la práctica

Sugerir que se observe la práctica en las aulas equivale a que los docentes mientras impartimos nuestras clases auto-evaluemos nuestro discurso, nuestras estrategias de trabajo, nuestra programación, la captación y dominio de contenidos, las interacciones, entre otros aspectos de importancia para determinar el grado de desarrollo del proceso escolar.

La meta es que los docentes, en el aula de clases, observemos y detectemos posibilidades y limitaciones de los alumnos frente a los trabajos abordados, frente a inquietudes, frente a creaciones o soluciones, entre otros, aprovechando esos datos como diagnóstico y parámetro de medición de nuestro quehacer diario en interacción con nuestros alumnos.

Observar o auto-evaluar las prácticas de aula entre profesores y alumnos brinda oportunidades del tipo:

Profesor: Muchos alumnos no comprenden...

Profesor: Hay un serio problema de atención en el grupo...

Profesor: Lo invito a que vea un interesante trabajo que hacemos con los alumnos...

Alumno: Me gusta la materia... porque se deja entender; no entiendo la materia...

Alumno: Yo tenía buenas notas, pero me dejé llevar y ahora bajé el rendimiento...⁴

Estudio sobre la práctica

Con la proposición «Estudio sobre la práctica» aludimos a la revisión de literatura teórica, de investigación y de intervención psicopedagógica. La meta de este componente es invitar a los docentes al estudio de materiales relacionados con situaciones de aprendizaje, de enseñanza, de la propia disciplina, entre otras situaciones de interés y básicos para la cualificación y mejora de la práctica escolar. Que los docentes estudiemos o revisemos literatura pertinente, nos facilitará atender con eficiencia, problemas como los descritos hace poco.

Concretamente, estudiar o revisar literatura sobre la práctica escolar

⁴ Estos datos hacen parte del diagnóstico obtenido con profesores y alumnos de la institución que asesoramos desde la Universidad del Valle.

posibilita establecer un inmediato y estrecho vínculo con las situaciones observadas en las aulas y con la idea de impulsar la práctica inicial, toda vez que ésta se relaciona con la creatividad y la innovación.

Programación de la práctica

Bajo la meta de lograr organización, coherencia y sentido en el desarrollo escolar y en nuestra práctica de aula, es conveniente adoptar estrategias de programación.

Programar o planear las actividades a realizar en las aulas evita el azar, la inercia o en general la improvisación y posibilita lo concreto, la secuencia o en general la creación y la sistematicidad. La riqueza de nuestra «programación» de las prácticas de aula **depende del nivel alcanzado en el «estudio» de la literatura** que revisemos para atender necesidades, intereses y dificultades según datos de nuestras «observaciones» o auto-evaluaciones y según nuestra iniciativa de retornar a la idea de «impulsar la práctica inicial» en el interés de «re-vivificar las prácticas de aula».

Fundamentación: Psicopedagogía y desarrollo escolar

Fundamentamos la anterior propuesta en los presupuestos de la orientación teórica histórico-cultu-

ral, socio-cultural o situacional⁵ de Vygotski, por un lado, y en los presupuestos de la teoría o modelos⁶ de intervención educativa y el asesoramiento psicopedagógico, por otro. Fundamentos extensibles al trabajo empírico que describiremos en el capítulo tres de este trabajo. Caracterizaremos por separado cada una de estas cuestiones.

⁵ El término originario de la teoría de Vygotski es «histórico-cultural», sustituyéndose en las traducciones por «socio-cultural» (Álvarez y Del Río, 1990). El término «situacional» es usado para enmarcar las teorías que hacen referencia al papel del contexto y la sociedad en el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje (Descals, 2002). Nosotros preferimos el término «histórico-cultural» por la asunción, trascendencia y sentido implicado en el mismo y relacionado con el desarrollo teórico de su autor.

⁶ Adela Descals (2002, 47-49) establece una diferenciación entre «orientaciones teóricas», «teorías» y «modelos» para superar la confusión, la ambigüedad y el uso indistinto por muchos autores de términos como «paradigma», «programa de investigación», «teoría», «enfoque» y «modelo». Al respecto precisa: 1. «En lugar de paradigmas utilizaremos el término de orientaciones teóricas para referirnos a las grandes formulaciones teóricas; 2. Podríamos llegar a una definición consensuada de teoría como un constructo o sistema conceptual que pretende explicar la realidad del fenómeno estudiado, se comprueba empíricamente y es aceptada por la mayoría de la comunidad científica; 3. Un modelo se refiere a un esquema formal o representación organizada de las variables relevantes para el fenómeno estudiado, que está en estrecha relación con las explicaciones teóricas».

Orientación teórica vygotskiana

Relevancia, pertinencia y vigencia de la orientación teórica de Vygotski

Consideramos relevante, pertinente y vigente la teoría de Vygotski —con la respectiva matización— por albergar-considerar en el proceso escolar aspectos como el contexto, la interacción de los sujetos, las actividades en el aula, el discurso, el desarrollo y el aprendizaje, lo afectivo y lo cognitivo, la observación y, por sobre todo, el uso de la dialéctica en el análisis y la acción, llámese teoría-práctica, psicología-pedagogía, sociedad-cultura, pensamiento-lenguaje, entre muchos.

La relevancia, pertinencia y vigencia de la teoría vygotskiana se refleja en los trabajos de autoridades en el ámbito de la psicología, la pedagogía, la lingüística o la antropología en diferentes latitudes del mundo. Evidencian lo anterior la numerosa publicación de trabajos de referencia y revisión, de investigación e intervención y las traducciones de algunas obras pioneras de Vygotski del ruso al inglés y al castellano, entre otras: *Pensamiento y Lenguaje; el desarrollo de los procesos psicológicos superiores; la imaginación y el arte en la infancia; aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar; psicología pedagógica*.

De entre los muchos seguidores actuales de la orientación teórica de Vygotski o de su pensamiento y su obra, se destacan Cole y colaboradores, (1971, 1974, 1984, 1988); Wertsch, (1979, 1984, 1985); Bruner, (1981); Edwards y Mercer, (1988); Mercer, (1992, 1997, 2001); Del Río y Álvarez, (1984, 1990, a, b y c); Coll y colaboradores, (1984, 1992); Rogoff, (1993); Cazden, (1984, 1991); Blanck, (1984, 2005); Freire, (1994). Todos señalan la vigencia y relevancia de la obra y pensamiento de Vygotski experimentándolo, investigándolo o reseñándolo.

Campos de acción de la orientación teórica de Vygotski

1. La obra y pensamiento de Vygotski gira en torno a su *teoría de la génesis histórico-cultural*, consistente en rastrear el origen filo y ontogenético de los procesos psicológicos que posibilitan o inhiben el desarrollo físico, mental y emocional de las especies o sujetos en grupo. Método que constata o aplica en cualquiera de sus estudios, sean estos experimentales o teóricos. Citemos como caso su estudio *Pensamiento y lenguaje* (1977) o el estudio *El método de investigación reflexológica y psicológica* (1984) en los que establece los rastreos históricos correspondientes y, ubicándose en el presente, plantea críticas y formula alternativas a los problemas hallados por considerarlos parciales y faltos de rigor.

2. Complementa su método de investigación y análisis el uso frecuente y deliberado de la *dialéctica*. Aspecto éste de gran importancia para Vygotski y que lo resume en la casi totalidad de sus trabajos. Vygotski abona al análisis dialéctico la importancia de considerar la *unidad* o *conjunto* del fenómeno estudiado comprendiendo que el análisis de las partes no equivale al análisis del todo – de la unidad- y mucho menos si no se establecen los vínculos y las interacciones entre las partes de ese todo. De ahí su insistencia e invitación al uso deliberado de la *dialéctica* y de la *unidad* en el desarrollo de toda actividad que se precie teórico-práctica, investigativa-educativa o de enseñanza-aprendizaje. Muestra del uso fructífero que hace Vygotski de este recurso filosófico se observa en trabajos como *Aprendizaje y desarrollo* (1984); *Psicología pedagógica* (2005) *Pensamiento y palabra* (1981), por citar pocos.

3. Un aspecto de vital importancia –o central- en la obra y pensamiento de Vygotski lo constituye la influencia del *contexto socio-cultural* en el desarrollo y aprendizaje formal e informal. El punto es: la primera escuela –la informal- es el mundo, la calle, la casa, la familia. Cuando el niño llega a la segunda escuela –la formal- lleva consigo lo que recibió aprendiendo en la primera. Por lo tanto, la regla es usar los conocimientos

previos formados por el medio social y cultural en el que se desenvuelve el alumno, matizándolos-relacionándolos-modificándolos en un proceso de cambio conceptual.

La importancia del aspecto contextual en el desarrollo escolar en la teoría de Vygotski radica en que éste es rico en diversidad de temáticas/problemáticas susceptibles para el análisis de las aulas, para la observación e indagación y para la creación-participación de los alumnos en la construcción de conocimientos, en la valoración de los bienes culturales o en el establecimiento de relaciones y comportamientos sociales. En ese sentido el desarrollo del niño responde alternamente a situaciones externas (lo social y cultural) y a situaciones internas (lo mental).

4. La *Zona de Desarrollo Potencial* (ZDP) es un mecanismo o estrategia teórica usada por Vygotski para **señalar que es posible formar al alumno más allá de la edad cronológica y de los estadios de desarrollo** propuestos por Piaget. Sobre el particular Vygotski sugiere la existencia de una relación estrecha entre aprendizaje y desarrollo en la ZDP del niño. ZDP que supone el paso o tránsito de un «nivel de desarrollo actual» del niño a un «nivel de desarrollo potencial»: pasar de menos a más en cuestión de aprendizaje. El sentido y objetivo didáctico de la ZDP es educar en

prospectiva y no en retrospectiva ayudando o colaborando al alumno para que logre mejor comprensión y dominio de los fenómenos que aborda. Ayuda o colaboración que puede obtener en interacción con mayores o con iguales que presentan mejor progreso escolar.

5. Vygotski tras considerar la educación como proceso de *interacción* y la *actividad* como práctica de la interacción en el aula, sugiere que ambas se constituyan en unidades de análisis psicopedagógico con el objeto de observar regularidades, dificultades o fortalezas en los alumnos, en los docentes, en el discurso, en los recursos, etcétera, para introducir mejoras tanto en el proceso de aprendizaje como en el de enseñanza. De ese modo, para Vygotski *observar e investigar* las interacciones y las actividades en el aula es de gran importancia porque permite diagnosticar-conocer la realidad y en ese conocimiento enriquecer significativamente el desarrollo escolar.

6. Por último, -y asumiendo que dejamos por fuera otros aspectos importantes de la orientación teórica histórico-cultural de Vygotski- destacamos el gran papel que desempeñan en el desarrollo y pensamiento del niño las *manifestaciones artísticas* o la *estética*, como le llama el mismo Vygotski. La importancia que este autor concede a la estética en la

educación del niño se refleja en los estudios y trabajos abordados en su etapa de magisterio en la primaria y secundaria: *La educación estética*; *La imaginación y el arte en la infancia*; *La creación teatral en la edad infantil*; *La creación literaria en la edad escolar*. Trabajos en los que pone de relieve que la estética no ha de ser observada-abordada como excusa o nimiedad para pasar el tiempo y la expresión libre ni para estar al servicio de la pedagogía, cuando ésta hace mal uso de ella. Contrariamente, la estética ha de usarse para fomentar la creatividad, la inclinación y apreciación hacia las manifestaciones artísticas, el sentido crítico-valorativo de lo estético, entre otras metas que sensibilicen cuerpo-mente-espíritu del niño, como de hecho lo experimentan niños lectores, pintores, actores, músicos, danzarines...

Teoría psicopedagógica y modelos de asesoramiento

Consideramos de importancia las aportaciones de la teoría psicopedagógica y los modelos de asesoramiento psicopedagógico toda vez que contemplan el vínculo psicología-pedagogía, teoría-práctica, investigación-prácticas de aula y la intervención educativa para el mejoramiento de esas prácticas.

Teoría psicopedagógica

La importancia de la *unidad* psicopedagogía o del *binomio* psico-

logía-pedagogía se puede encontrar en las mejoras educativas susceptibles de alcanzar en el aprendizaje y en la enseñanza, fruto de la interacción entre ambas disciplinas o entre ambos procesos.

Una de las metas de esta unidad o binomio es abordar conjuntamente las situaciones de aprendizaje y de enseñanza. Y ello para explicitar el *proceso escolar dialéctico* que la pedagogía contempla de modo implícito pero que históricamente se ha inclinado –sobremanera– por los procesos de enseñanza.

La interacción de la unidad Psicopedagogía conduce a matizar-contextualizar-adaptar procesos, conocimientos, procedimientos o acciones mediante la reflexión de las situaciones escolares.

En la interacción de la Psicopedagogía -en cuanto la psicología se encarga de los procesos afectivo-cognitivos de los sujetos y la pedagogía de los procesos didácticos **escolares, sumariamente- se ha de ir más allá de la enunciación y separación de estos procesos vinculándolos en la práctica de aula, explotando las posibilidades creativas, emotivas, cognitivas o socio-afectivas de los sujetos.**

La Psicopedagogía ha de asumirse como *espacio reflexivo* de las situaciones que ocurren en el entorno, en las instituciones escolares, en las aulas,

en el aprendizaje, en la enseñanza; ha de asumirse como *espacio aplicativo* de acciones conducentes a la formación integral del *ontos*.

Dejando de lado posiciones contrarias sobre las posibilidades y aportaciones de la Psicopedagogía a la mejora escolar, a continuación señalamos algunas posiciones de quienes se decantan por esta opción.

A finales del siglo XIX James (1899) se refería a la necesidad de coordinación entre la Psicología y la Pedagogía sin que se subordinase la una a la otra ya que cada una era autónoma en sus principios, funciones y acciones. Concretamente decía:

«La Pedagogía y la Psicología marchan a la par, y la primera de ningún modo nació de la segunda. Ambas fueron equivalentes y ninguna estuvo subordinada a la otra. Y precisamente así la enseñanza y la psicología siempre deben estar *coordinadas* una con otra [...] Saber psicología no garantiza en absoluto que **seremos buenos maestros**» (citado por Vygotski, 2005, p. 58).

Una versión complementaria a la idea de James diría: saber pedagogía no garantiza en absoluto conocer los procesos implicados en el aprendizaje. De esto precisamente trata el acercamiento, la relación o el vínculo entre Pedagogía y Psicología. De ningún modo psicologizar la pedagogía o pedagogizar la psico-

logía. Se trata de conocer los hallazgos de la psicología en materia de comportamientos, de desarrollo, de condiciones en el aprendizaje o, en últimas, conocer descubrimientos y proposiciones sobre los procesos escolares provenientes de la psicología, que en ocasiones están ausentes en la pedagogía.

Al respecto del vínculo, las relaciones y la contribución de la psicología a la pedagogía Vygotski (2005) señala que si bien la psicología no puede brindar conclusiones pedagógicas directas, ha de recordarse que el proceso educativo es un proceso psicológico, por lo que conocer los fundamentos generales de la psicología ayuda sobremanera a plantear y a tratar, agregamos nosotros, científicamente la tarea educativa.

Siguiendo esta línea de planteamiento y considerando que «la educación es el cambio de conductas heredadas y la inoculación de nuevas formas de reacción», Vygotski señala que la psicología pedagógica es la ciencia sobre las leyes de modificación de la conducta humana y sobre los medios para dominar esas leyes. Se propone que al modo como la pedagogía acude a la filosofía o a la ética para formular principios, metas y objetivos educativos debe acudir a la psicología para indagar por problemas complejos del proceso escolar en general o por problemas particulares de enseñanza y

aprendizaje. O, específicamente, por problemas de interacción en las aulas.

Gilliéron (1980), al preguntarse por la psicopedagogía, precisa que la psicología es necesaria a la pedagogía y aunque el pedagogo no es un especialista en psicología ha de asumir compromisos con ésta disciplina en símil al psicólogo que no es pedagogo pero que por sus funciones en el medio escolar ha de estar al corriente de métodos pedagógicos, de programas y estructuras escolares, entre otras situaciones del ámbito. De forma complementaria a la visión de establecer relaciones entre la psicología y la pedagogía –psicopedagogía– para brindar mejoras al proceso escolar, Coll (1980, 1989, 1990, 1996) plantea que la educación se beneficia y obtiene ventajas importantes tras conocer y dominar procesos complejos investigados por la psicología.

Sumariamente, Gilliéron y Coll coinciden en señalar que una tarea fundante de la psicopedagogía consiste en investigar las interacciones maestros-alumnos, contemplando simultáneamente lo cognitivo y lo afectivo y usando la observación como método de investigación, para determinar la influencia de tales interacciones en el desarrollo escolar y, de ese modo, asumir estrategias de intervención y de asesoramiento psicopedagógico con miras

a la solución de problemas presentes en las aulas e introducir mejoras en las mismas. En el apartado que sigue ampliaremos esto último.

Modelos de asesoramiento psicopedagógico

Los modelos de asesoramiento psicopedagógico constituyen el marco de referencia específico de la propuesta arriba formulada y del trabajo empírico que estamos realizando en la institución que venimos asesorando, y que describiremos al finalizar este apartado.

La importancia de los modelos de intervención o asesoramiento psicopedagógico radica en que posibilitan el *trabajo colaborativo* entre asesores-profesores-alumnos, el diseño de la intervención, la solución de problemas latentes en las aulas, la evaluación de procesos, la observación e investigación de las prácticas de aula, entre muchos.

Al respecto, la definición de Sánchez (1995, 2000) es ilustrativa cuando dice que el *asesoramiento colaborativo* es un modelo de intervención psicopedagógica consistente en «ayudar a los docentes en la identificación y resolución de los problemas que surgen en el proceso de escolarización». Por la misma línea están las visiones de Monereo y Solé (1996); Solé (1998), Bassedas y otros (1991) o Davidson (1990) cuando propone el *asesoramiento* como

la resolución conjunta de problemas en la que el asesorado ha de tomar activa participación en cada una de las seis fases de su modelo:

1. Definición del problema
2. Colección de datos
3. Búsqueda de soluciones
4. Diseño del plan de acción
5. Intervención
6. Evaluación

Sánchez (2000), de modo similar a Davidson, propone un modelo de asesoramiento con dos dimensiones y seis componentes:

Dimensión uno

Resolución conjunta de problemas

- Identificación de problemas y delimitación de metas
- Búsqueda y organización de soluciones
- Evaluación de resultados y reformulación

Dimensión dos

Dimensión dos

Creación de la relación de colaboración

- a. Escuchar punto de vista profesor
- b. Comprender necesidades frente a problemas
- c. Valoración de recursos del profesor

Dos datos para finalizar este apartado:

1. Los dos modelos de asesoramiento psicopedagógico des-

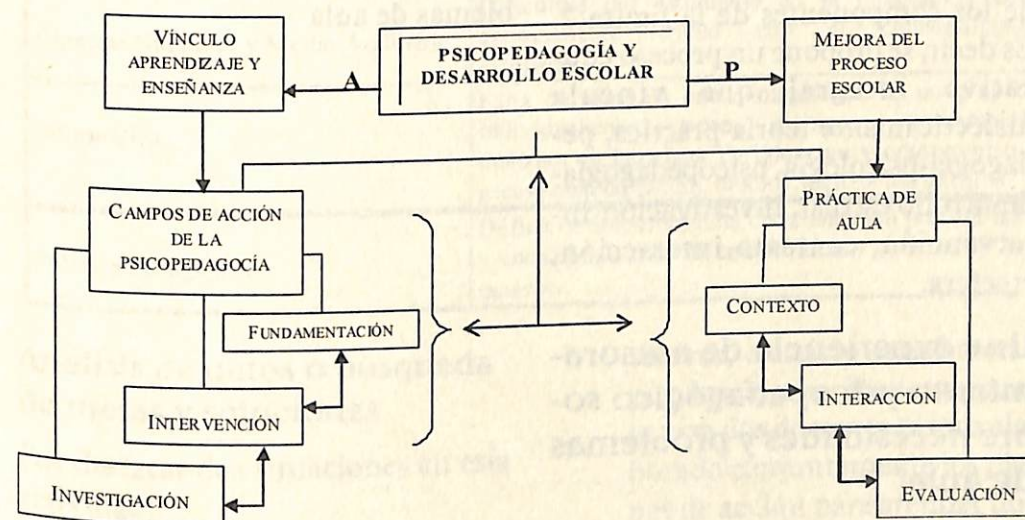
critos *grosso modo* (Davidson, 1990 y Sánchez, 2000) -aunque complejos operativamente- facilitan sobremanera el proceso de asesoramiento.

2. «Brindar ayuda», «trabajo colaborativo» o «trabajo conjunto» son constructos que se conectan con la idea ZDP de Vygotski según la cual hay que

trabajar conjuntamente con los alumnos para ayudarles a avanzar o colaborarles en su desarrollo.

Por último y a modo de síntesis de la revisión teórica realizada, presentamos la figura 2 en la que relacionamos psicopedagogía y desarrollo escolar:

Figura 2: Proceso interactivo de la Psicopedagogía y el Desarrollo Escolar



Como se aprecia en la figura 2, identificamos dos dimensiones que se unifican en la designación «Psicopedagogía y Desarrollo Escolar». Al lado izquierdo de la figura desglosamos, a modo de «antecedentes» (A), los componentes que integran la psicopedagogía: «vínculo» y «campos de acción», destacándose los procesos de

fundamentación o revisión teórica, los procesos de intervención o de asesoramiento y los procesos de investigación o de observación de la práctica escolar. Al lado derecho de la figura desglosamos, a modo de «prospectiva» (P), los componentes contribuyentes al desarrollo escolar: mejora y práctica de aula, práctica en la que se ha de trabajar as-

pectos del contexto socio-cultural y ambiental inmediato, se ha de organizar la interacción y las actividades de aula y se ha de evaluar-retroalimentar dichas prácticas. En el centro de la figura se señala la intercomunicación entre las dos dimensiones y su convergencia hacia la unificación Psicopedagogía y Desarrollo Escolar.

Obsérvese el alto grado de interacción que ocurre tanto en la globalidad como en la especificidad de los componentes de la figura 2. Es decir, se propone un proceso educativo integral que vincula dialécticamente teoría-práctica, pedagogía-psicología, psicopedagogía-desarrollo escolar, investigación-intervención, contexto-interacción, etcétera.

Una experiencia de asesoramiento psicopedagógico sobre necesidades y problemas de aula⁷

Por encontrarse a medio camino el proyecto mencionado en esta ocasión presentamos, a brevedad, algunos avances que consideramos ilustran el proceso de mejoramiento educativo que se adelanta en la institución que venimos asesorando. Puntualizamos que la experiencia que ahora presentamos se refiere exclusivamente a «necesidades y problemas de aula» presentes en distintos grupos escolares de la institución

y no a otros aspectos del proyecto como la asesoría sobre investigación o sobre modelos pedagógicos. En esta experiencia actuamos básicamente siguiendo el modelo de *asesoramiento colaborativo* intercalando fases y componentes de las propuestas de Davidson y Sánchez.

Diagnóstico o identificación de problemas

El cuadro 1 resume los datos del diagnóstico sobre necesidades y problemas de aula

⁷ Significamos con «necesidades y problemas de aula» situaciones escolares diarias como indisciplina, bajo rendimiento, falta de hábito de lectura, etc., manifestadas por alumnos en interacción con docentes pero atendidas-resueltas parcialmente -en muchos casos- o porque los docentes carecen de herramientas y formación sobre algunos de estos aspectos o porque permanecen multi-ocupados, etc.

Cuadro 1: Resumen de Diagnóstico sobre necesidades y problemas de aula por áreas.

ÁREAS	NECESIDADES Y PROBLEMAS DE AULA
Matemáticas	Baja comprensión de lectura; lectura inadecuada de expresiones Matemáticas; dificultades en resolución de problemas; no dominio de términos matemáticos en operaciones.
Sociales	Problemas de lectura; no conocimiento previo de alumnos de temas a tratar; no dominio de conceptos y fechas históricas; no autorreconocimiento de alumnos como afrodescendientes.
Lenguaje	Falta de hábitos de lectura; escritura y oralidad sin reglas ortográficas; inseguridad en el dominio de temas; problemas de comprensión e interpretación.
Ciencias Naturales y Medio Ambiente	Dificultad del estudiante en la integración del conocimiento trivial con el conocimiento científico.
Informática	Falta de armonía entre integrantes de un grupo: individualismo, poco diálogo, intolerancia, maltrato verbal, falta de liderazgo y compromiso, escasa concentración, mediocridad en los trabajos.
Práctica Pedagógica	Déficit de atención; falta de orientación profesional y vocacional; falta de compromiso y convicción de maestro.

Análisis de datos o búsqueda de metas y soluciones

Por destacar dos situaciones en esta actividad:

1. El alto grado de ocupación de los docentes de la institución asesorada imposibilitó el trabajo conjunto en la búsqueda de metas y soluciones a los problemas detectados, al modo como lo sugiere el *asesoramiento colaborativo*.
2. Sólo con una docente se trabajó conjuntamente en la búsqueda de metas y soluciones a los problemas identificados en

su área, ejercicio satisfactorio por sus logros. Recientemente, con dos docentes hemos elaborado conjuntamente los planes de acción para atender dos problemas puntuales: «bajo rendimiento académico» y «alto grado de indisciplina». Tarea que próximamente realizaremos con otros docentes.

Planes de acción o programas para atender necesidades y problemas de aula

Esta fase fue de gran importancia a la hora de entender los problemas

acudiendo a diversa literatura y a investigaciones para apoyar la programación y atender de forma coherente las necesidades y problemas identificados - en apariencia fáciles de abordar pero complejos en su tratamiento o solución - (ver cuadro 1). En todo caso, se elaboraron programas - no planes de acción - para atender algunas de las necesidades y problemas que hasta ahora hemos abordado mediante talleres de asesoría.

Asesoría o aplicación de talleres a necesidades y problemas de aula

Ilustramos este apartado resumiendo resultados parciales de la experiencia de asesoramiento abordada describiendo dos casos concretos de asesoría aplicada a necesidades y problemas de aula:

Caso uno

Grado: 5º de primaria

Problema: Falta de hábitos de lectura.

Taller: Iniciación a la lectura

Objetivo: Promover e incentivar el hábito y disfrute de la lectura

Actividades y estrategias: diagnóstico de lectores, narración y lectura de cuentos

Evaluación: Gustó el taller y se asumen compromisos de lecturas

Logros: Dos meses después los niños y su profesora muestran resultados parciales de su proyecto lector, con estos datos:

Número menor de libros leídos por niño = 4

Número mayor de libros leídos por niño = 12

Caso dos

Grado: 7º

Problema: Falta de armonía entre integrantes del grupo

Taller: Orientación sobre trabajo en grupo

Objetivo: Generar conciencia sobre trabajo en grupo y sus aportes al desarrollo...

Actividades y estrategias: estudio de caso individualismo, charla amistad, rompecabezas

Evaluación: Gustó el taller y se asumen compromisos de respeto y amistad

Logros: En charla con profesora me dice: -al menos ya no se gritan; en charla con alumnos me dicen: -estamos puestos las pilas-

En el cuadro 2 relacionamos los talleres de asesoría realizados a la fecha, según áreas, grados y necesidades-problemas.

Cuadro 2: Relación talleres de asesoría x áreas, grados y necesidades-problemas de aula.

ÁREAS	GRADOS	NECESIDADES Y PROBLEMAS DE AULA	TALLERES DE ASESORÍA
Lenguaje	5º - 1	Falta de hábitos de lectura	Iniciación a la lectura
	6º - 3	Falta de hábitos de lectura	Iniciación a la lectura
	10º - 1	Bajo rendimiento	Disposición al estudio y uso de estrategias
Práctica pedagógica	8º - 2	Déficit de atención	Observación problemas de atención
	C. C. - 2	Falta compromiso y convicción hacia magisterio	Valores y compromisos del maestro
	10º - 2	Falta de orientación profesional y vocacional	Orientación profesional y vocacional
Informática	7º - 2	Falta de armonía entre integrantes de grupo	Orientación sobre trabajo grupal
CC. NN. YM. Ambiente	7º - 3	Dificultad integración conocim. trivial y científico	Integración conocim. cotidiano y científico
Matemáticas	9º - 1	Dificultades de comprensión y solución problemas	Comprensión y solución de problemas
Sociales	8º - 3	Falta dominio de conceptos y fechas históricas	Conocim previos y dominio de conceptos

Evaluación o retroalimentación de asesoría a necesidades y problemas de aula

Conclusión breve y provisional: Aún es temprano para observar grandes cambios en los alumnos frente a las necesidades y problemas de aula trabajados. Cambios que esperamos se acrecienten en la etapa que ahora iniciamos con algunos docentes de la institución que venimos asesoran-

do en el análisis, programación y aplicación conjunta de planes de acción para atender las situaciones problemáticas diagnosticadas. Por lo que recomendamos el *trabajo conjunto* entre docentes-alumnos-asesores psicopedagógicos frente a necesidades y problemas de aula en el ánimo de hacer conciencia sobre los mismos abordándolos o solucionándolos.

Bibliografía

4.1. De Vygotski:

1. *Pensamiento y lenguaje* (1977). Buenos Aires: Pléyade.

2. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores (1979). Barcelona: Crítica

3. Aprendizaje y desarrollo intelectual (1984). *Infancia y Aprendizaje*, 27-28, 105-116.

4. *Psicología pedagógica* (2005). Buenos Aires: Aique.

5. *La creación teatral en la edad infantil* (1982).. *Infancia y Aprendizaje*, 17, 86-89.

6. *La creación literaria en la edad escolar* (1982). *Infancia y Aprendizaje*, 17, 71-85.

4.2. De otros autores:

7. Bassedas, E. y otros. (1991). *Intervención educativa y diagnóstico psicopedagógico*. Barcelona: Paidós.

8. Bruner, J. (1968). *El proceso de la educación*. México: UTEHA.

9. Coll, C. (1989). *Conocimiento psicológico y práctica educativa. Introducción a las relaciones entre psicología y educación*. Barcelona: Barcanova.

10. Davidson, J. (1990). The process of school consultation: give and take. En E. Cole y J.A. Siegel (Eds.), *Effective*

consultation in school psychology. Toronto: Hogrefe Publis.

11. Descals, A. (2002). *Psicología de la instrucción*. Valencia: Universidad Valencia.

12. Gillieron, Ch. (1980). El psicopedagogo como observador. *Infancia y Aprendizaje*, 9, 7-21.

13. Karmiloff-Smith, A. e Inhelder, B. (1981). Si quieres avanzar hazte con una teoría. *Infancia y aprendizaje*, 13, 59-88.

14. Monereo, C. y Solé, I. (eds.). (1996). *El asesoramiento psicopedagógico: una perspectiva profesional y constructivista*. Madrid: Alianza.

15. Sánchez, E. (2001). Ayudando a ayudar: el reto de la investigación educativa. *Cultura y educación*, 13 (3), 249-266.

16. Sánchez, E. (2000). El asesoramiento psicopedagógico: un estudio observacional. *Infancia y Aprendizaje*, 91, 55-77

17. Schön, D. (1992). La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona: Paidós.

18. Solé, I. (1998). La concepción constructivista y el asesoramiento en centros. *Infancia y Aprendizaje*, 77, 77-95.

Algunas Reflexiones desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico Alrededor de la Factorización de Polinomios desde un Ambiente Cas y Lápiz/Papel

MARÍA FERNANDA MEJÍA PALOMINO

Estudiante de la Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática, Universidad del Valle, Docente Escuela Normal Superior Farallones de Cali. E-mail: maferme@univalle.edu.co

Resumen

Se presentan algunas reflexiones desde la TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico) en torno a la integración de las Calculadoras Graficadoras Algebraicas en el estudio de la factorización de polinomios reales de una variable en un ambiente CAS (Sistema de álgebra computacional) y L/P (Lápiz/Papel).

Una de las hipótesis a presentarse se centra en la dialéctica entre las técnicas habituales e instrumentales, necesarias en las actividades matemáticas y en las relaciones con las tareas y la teoría.

Palabras claves

Técnicas instrumentadas, técnicas habituales, factorización de polinomios, calculadoras simbólicas, ambientes CAS y L/P.

Reflexiones de Algunas Prácticas de Enseñanza Habituales de la Factorización de Polinomios

Al revisar los lineamientos y *normas curriculares* vigentes, expedidos por el MEN, la factorización de polinomios es considerada como una manera de construir expresiones algebraicas o generar expresiones equivalentes dentro de contextos de variación y cambio. En la mayoría de los textos escolares, la factorización de expresiones polinómicas es uno de los contenidos a enseñar, particularmente para grado octavo de la educación básica secundaria en Colombia.

Generalmente la enseñanza de la factorización en ambientes L/P, requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico, que suele ser extraña y de difícil adquisición para la mayoría de los estudiantes. En algunos casos, las reglas se construyen a partir de la manipulación de rectángulos en cartulina, cuyas áreas son monomios que al ser ubicados de manera que conformen un rectángulo de mayor área, generan una suma total como la suma de cada una de las áreas de los rectángulos que conforman el rectángulo de mayor área o la expresión factorizada, al considerar el área de un rectángulo como el producto de la base y la altura.

En el anterior ejemplo, la factorización de polinomios cuadráticos estaría vinculando a tres sistemas de representación, el de las figuras geométricas, el lenguaje natural y las expresiones algebraicas, pero en otros casos, se *continúa con las expresiones algebraicas* olvidando otras representaciones y conexiones con otros conceptos y procedimientos, promoviendo la enseñanza de un álgebra como un conjunto atomizado de conocimientos (Gascón, 1999 p. 84).

Pero no basta con determinar la regla para factorizar el polinomio, para aprenderla a usar es necesario dedicarle tiempo para saber cuándo y para qué usarla. Pero a veces se cree que basta con unos pocos ejemplos aislados para aprenderla. Al ignorar lo anterior, se generan prácticas en las que se da por hecho que las matemáticas deben «aprenderse» al mismo tiempo que se «enseñan» (Ibíd., p.85).

Para mirar un poco más a fondo las características de las manipulaciones algebraicas de los estudiantes en los ambientes Lápiz/Papel, se han reportado algunos errores en los trabajos de Sánchez (1997, p. 5), Socas y et. al. (1997, p. 21) y Camacho y et. al. (1996, p. 104) como el inadecuado uso del igual, las falsas generalizaciones, la extensión de propiedades y la tendencia de una enseñanza centrada en algunos ejemplos típicos,

con pocas representaciones semióticas y técnicas específicas. Lo anterior muestra el costo de aprendizaje de los algoritmos de Lápiz/Papel para factorizar expresiones algebraicas y su escasa significación para los estudiantes.

La factorización de polinomios en ambientes CAS

Dentro de otros ambientes, como los generados por los Sistemas de Álgebra Computacional (CAS), la factorización de polinomios tiene un tratamiento diferente. Estos sistemas dan la factorización de cualquier expresión algebraica, ejecutando uno de sus comandos al ingresar la expresión, ya sea en los racionales, reales o complejos (Ver figura 1).

Para ingresar la expresión algebraica es necesario que el estudiante conozca la sintaxis de entrada, que en ocasiones es diferente a la

escritura a Lápiz/Papel. Por ejemplo para escribir la expresión $x^2 + 2x + 4$, el exponente no se ingresa como superíndice, se necesita de anteponer al número 2 el símbolo ^, es decir la expresión se escribe como $x^2 + 2x + 4$. Sin embargo, la expresión una vez ingresa al sistema se observa de manera similar que en Lápiz/Papel (ver figura 2). Este suceso se conoce como el fenómeno de Pseudo-transparencia, conflicto que se genera con lo que se ingresa y se ve en la pantalla del computador (Artigue, 1997). Este fenómeno está ligado a los procesos de transposición computacional, entendiéndose como las transformaciones que sufre un objeto matemático debido a las decisiones que son tomadas al diseñar un software, tales como la selección de una representación y un conocimiento estructurado o de los algoritmos a aplicar (Balacheff y Kaput, 1996).

Figura 1. Diferentes factorizaciones de polinomios en una TI-92

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27	F28	F29	F30	F31	F32	F33	F34	F35	F36	F37	F38	F39	F40	F41	F42	F43	F44	F45	F46	F47	F48	F49	F50	F51	F52	F53	F54	F55	F56	F57	F58	F59	F60	F61	F62	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75	F76	F77	F78	F79	F80	F81	F82	F83	F84	F85	F86	F87	F88	F89	F90	F91	F92	F93	F94	F95	F96	F97	F98	F99	F100	F101	F102	F103	F104	F105	F106	F107	F108	F109	F110	F111	F112	F113	F114	F115	F116	F117	F118	F119	F120	F121	F122	F123	F124	F125	F126	F127	F128	F129	F130	F131	F132	F133	F134	F135	F136	F137	F138	F139	F140	F141	F142	F143	F144	F145	F146	F147	F148	F149	F150	F151	F152	F153	F154	F155	F156	F157	F158	F159	F160	F161	F162	F163	F164	F165	F166	F167	F168	F169	F170	F171	F172	F173	F174	F175	F176	F177	F178	F179	F180	F181	F182	F183	F184	F185	F186	F187	F188	F189	F190	F191	F192	F193	F194	F195	F196	F197	F198	F199	F200	F201	F202	F203	F204	F205	F206	F207	F208	F209	F210	F211	F212	F213	F214	F215	F216	F217	F218	F219	F220	F221	F222	F223	F224	F225	F226	F227	F228	F229	F230	F231	F232	F233	F234	F235	F236	F237	F238	F239	F240	F241	F242	F243	F244	F245	F246	F247	F248	F249	F250	F251	F252	F253	F254	F255	F256	F257	F258	F259	F260	F261	F262	F263	F264	F265	F266	F267	F268	F269	F270	F271	F272	F273	F274	F275	F276	F277	F278	F279	F280	F281	F282	F283	F284	F285	F286	F287	F288	F289	F290	F291	F292	F293	F294	F295	F296	F297	F298	F299	F300	F301	F302	F303	F304	F305	F306	F307	F308	F309	F310	F311	F312	F313	F314	F315	F316	F317	F318	F319	F320	F321	F322	F323	F324	F325	F326	F327	F328	F329	F330	F331	F332	F333	F334	F335	F336	F337	F338	F339	F340	F341	F342	F343	F344	F345	F346	F347	F348	F349	F350	F351	F352	F353	F354	F355	F356	F357	F358	F359	F360	F361	F362	F363	F364	F365	F366	F367	F368	F369	F370	F371	F372	F373	F374	F375	F376	F377	F378	F379	F380	F381	F382	F383	F384	F385	F386	F387	F388	F389	F390	F391	F392	F393	F394	F395	F396	F397	F398	F399	F400	F401	F402	F403	F404	F405	F406	F407	F408	F409	F410	F411	F412	F413	F414	F415	F416	F417	F418	F419	F420	F421	F422	F423	F424	F425	F426	F427	F428	F429	F430	F431	F432	F433	F434	F435	F436	F437	F438	F439	F440	F441	F442	F443	F444	F445	F446	F447	F448	F449	F450	F451	F452	F453	F454	F455	F456	F457	F458	F459	F460	F461	F462	F463	F464	F465	F466	F467	F468	F469	F470	F471	F472	F473	F474	F475	F476	F477	F478	F479	F480	F481	F482	F483	F484	F485	F486	F487	F488	F489	F490	F491	F492	F493	F494	F495	F496	F497	F498	F499	F500	F501	F502	F503	F504	F505	F506	F507	F508	F509	F510	F511	F512	F513	F514	F515	F516	F517	F518	F519	F520	F521	F522	F523	F524	F525	F526	F527	F528	F529	F530	F531	F532	F533	F534	F535	F536	F537	F538	F539	F540	F541	F542	F543	F544	F545	F546	F547	F548	F549	F550	F551	F552	F553	F554	F555	F556	F557	F558	F559	F560	F561	F562	F563	F564	F565	F566	F567	F568	F569	F570	F571	F572	F573	F574	F575	F576	F577	F578	F579	F580	F581	F582	F583	F584	F585	F586	F587	F588	F589	F590	F591	F592	F593	F594	F595	F596	F597	F598	F599	F600	F601	F602	F603	F604	F605	F606	F607	F608	F609	F610	F611	F612	F613	F614	F615	F616	F617	F618	F619	F620	F621	F622	F623	F624	F625	F626	F627	F628	F629	F630	F631	F632	F633	F634	F635	F636	F637	F638	F639	F640	F641	F642	F643	F644	F645	F646	F647	F648	F649	F650	F651	F652	F653	F654	F655	F656	F657	F658	F659	F660	F661	F662	F663	F664	F665	F666	F667	F668	F669	F670	F671	F672	F673	F674	F675	F676	F677	F678	F679	F680	F681	F682	F683	F684	F685	F686	F687	F688	F689	F690	F691	F692	F693	F694	F695	F696	F697	F698	F699	F700	F701	F702	F703	F704	F705	F706	F707	F708	F709	F710	F711	F712	F713	F714	F715	F716	F717	F718	F719	F720	F721	F722	F723	F724	F725	F726	F727	F728	F729	F730	F731	F732	F733	F734	F735	F736	F737	F738	F739	F740	F741	F742	F743	F744	F745	F746	F747	F748	F749	F750	F751	F752	F753	F754	F755	F756	F757	F758	F759	F760	F761	F762	F763	F764	F765	F766	F767	F768	F769	F770	F771	F772	F773	F774	F775	F776	F777	F778	F779	F780	F781	F782	F783	F784	F785	F786	F787	F788	F789	F790	F791	F792	F793	F794	F795	F796	F797	F798	F799	F800	F801	F802	F803	F804	F805	F806	F807	F808	F809	F810	F811	F812	F813	F814	F815	F816	F817	F818	F819	F820	F821	F822	F823	F824	F825	F826	F827	F828	F829	F830	F831	F832	F833	F834	F835	F836	F837	F838	F839	F840	F841	F842	F843	F844	F845	F846	F847	F848	F849	F850	F851	F852	F853	F854	F855	F856	F857	F858	F859	F860	F861	F862	F863	F864	F865	F866	F867	F868	F869	F870	F871	F872	F873	F874	F875	F876	F877	F878	F879	F880	F881	F882	F883	F884	F885	F886	F887	F888	F889	F890	F891	F892	F893	F894	F895	F896	F897	F898	F899	F900	F901	F902	F903	F904	F905	F906	F907	F908	F909	F910	F911	F912	F913	F914	F915	F916	F917	F918	F919	F920	F921	F922	F923	F924	F925	F926	F927	F928	F929	F930	F931	F932	F933	F934	F935	F936	F937	F938	F939	F940	F941	F942	F943	F944	F945	F946	F947	F948	F949	F950	F951	F952	F953	F954	F955	F956	F957	F958	F959	F960	F961	F962	F963	F964	F965	F966	F967	F968	F969	F970	F971	F972	F973	F974	F975	F976	F977	F978	F979	F980	F981	F982	F983	F984	F985	F986	F987	F988	F989	F990	F991	F992	F993	F994	F995	F996	F997	F998	F999	F1000	F1001	F1002	F1003	F1004	F1005	F1006	F1007	F1008	F1009	F1010	F1011	F1012	F1013	F1014	F1015	F1016	F1017	F1018	F1019	F1020	F1021	F1022	F1023	F1024	F1025	F1026	F1027	F1028	F1029	F1030	F1031	F1032	F1033	F1034	F1035	F1036	F1037	F1038	F1039	F1040	F1041	F1042	F1043	F1044	F1045	F1046	F1047	F1048	F1049	F1050	F1051	F1052	F1053	F1054	F1055	F1056	F1057	F1058	F1059	F1060	F1061	F1062	F1063	F1064	F1065	F1066	F1067	F1068	F1069	F1070	F1071	F1072	F1073	F1074	F1075	F1076	F1077	F1078	F1079	F1080	F1081	F1082	F1083	F1084	F1085	F1086	F1087	F1088	F1089	F1090	F1091	F1092	F1093	F1094	F1095	F1096	F1097	F1098	F1099	F1100	F1101	F1102	F1103	F1104	F1105	F1106	F1107	F1108	F1109	F1110	F1111	F1112	F1113	F1114	F1115	F1116	F1117	F1118	F1119	F1120	F1121	F1122	F1123	F1124	F1125	F1126	F1127	F1128	F1129	F1130	F1131	F1132	F1133	F1134	F1135	F1136	F1137	F1138	F1139	F1140	F1141	F1142	F1143	F1144	F1145	F1146	F1147	F1148	F1149	F1150	F1151	F1152	F1153	F1154	F1155	F1156	F1157	F1158	F1159	F1160	F1161	F1162	F1163	F1164	F1165	F1166	F1167	F1168	F1169	F1170	F1171	F1172	F1173	F1174	F1175	F1176	F1177	F1178	F1179	F1180	F1181	F1182	F1183	F1184	F1185	F1186	F1187	F1188	F1189	F1190	F1191	F1192	F1193	F1194	F1195	F1196	F1197	F1198	F1199	F1200	F1201	F1202	F1203	F1204	F1205	F1206	F1207	F1208	F1209	F1210	F1211	F1212	F1213	F1214	F1215	F1216	F1217	F1218	F1219	F1220	F1221	F1222	F1223	F1224	F1225	F1226	F1227	F1228	F1229	F1230	F1231	F1232	F1233	F1234	F1235	F1236	F1237	F1238	F1239	F1240	F1241	F1242	F1243	F1244	F1245	F1246	F1247	F1248	F1249	F1250	F1251	F1252	F1253	F1254	F1255	F1256	F1257	F1258	F1259	F1260	F1261	F1262	F1263	F1264	F1265	F1266	F1267	F1268	F1269	F1270	F1271	F1272	F1273	F1274	F1275	F1276	F1277	F1278	F1279	F1280	F1281	F1282	F1283	F1284	F1285	F1286	F1287	F1288	F1289	F1290	F1291	F1292	F1293	F1294	F1295	F1296	F1297	F1298	F1299	F1300	F1301	F1302	F1303	F1304	F1305	F1306	F1307	F1308	F1309	F1310	F1311	F1312	F1313	F1314	F1315	F1316	F1317	F1318	F1319	F1320	F1321	F1322	F1323	F1324	F1325	F1326	F1327	F1328	F1329	F1330	F1331	F1332	F1333	F1334	F1335	F1336	F1337	F1338	F1339	F1340	F1341	F1342	F1343	F1344	F1345	F1346	F1347	F1348	F1349	F1350	F1351	F1352	F1353	F1354	F1355	F1356	F1357	F1358	F1359	F1360	F1361	F1362	F1363	F1364	F1365	F1366	F1367	F1368	F1369	F1370	F1371	F1372	F1373	F1374	F1375	F1376	F1377	F1378	F1379	F1380	F1381	F1382	F1383	F1384	F1385	F1386	F1387	F1388	F1389	F1390	F1391	F1392	F1393	F1394	F1395	F1396	F1397	F1398	F1399	F1400	F1401	F1402	F1403	F1404	F1405	F1406	F1407	F1408	F1409	F1410	F1411	F1412	F1413	F1414	F1415	F1416	F1417	F1418	F1419	F1420	F1421	F1422	F1423	F1424	F1425	F1426	F1427	F1428	F1429	F1430	F1431	F1432	F1433	F1434	F1435	F1436	F1437	F1438	F1439	F1440	F1441	F1442	F1443	F1444	F1445	F1446	F1447	F1448	F1449	F1450	F1451	F1452	F1453	F1454	F1455	F1456	F1457	F1458	F1459	F1460	F1461	F1462	F1463	F1464	F1465	F1466	F1467	F1468	F1469	F1470	F1471	F1472	F1473	F1474	F1475	F1476	F1477	F1478	F1479	F1480	F1481	F1482	F1483	F1484	F1485	F1486	F1487	F1488	F1489	F1490	F1491	F1492	F1493	F1494	F1495	F1496	F1497	F1498
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Reflexiones de Algunas Prácticas de Enseñanza Habituales de la Factorización de Polinomios

Al revisar los lineamientos y estándares curriculares vigentes, expedidos por el MEN, la factorización de polinomios es considerada como una manera de construir expresiones algebraicas o generar expresiones equivalentes dentro de contextos de variación y cambio. En la mayoría de los textos escolares, la factorización de expresiones polinómicas es uno de los contenidos a enseñar, particularmente para grado octavo de la educación básica secundaria en Colombia.

Generalmente la enseñanza de la factorización en ambientes L/P, requiere de reglas que clasifican los polinomios y necesitan de su manejo sintáctico, que suele ser extraña y de difícil adquisición para la mayoría de los estudiantes. En algunos casos, las reglas se construyen a partir de la manipulación de rectángulos en cartulina, cuyas áreas son monomios que al ser ubicados de manera que conformen un rectángulo de mayor área, generan una suma total como la suma de cada una de las áreas de los rectángulos que conforman el rectángulo de mayor área o la expresión factorizada, al considerar el área de un rectángulo como el producto de la base y la altura.

En el anterior ejemplo, la factorización de polinomios cuadráticos estaría vinculando a tres sistemas de representación, el de las figuras geométricas, el lenguaje natural y las expresiones algebraicas, pero en otros casos, se trabajan con las expresiones algebraicas olvidando otras representaciones y conexiones con otros conceptos y procedimientos, promoviendo la enseñanza de un álgebra como un conjunto atomizado de conocimientos (Gascón, 1999 p. 84).

Pero no basta con determinar la regla para factorizar el polinomio, para aprenderla a usar es necesario dedicarle tiempo para saber cuándo y para qué usarla. Pero a veces se cree que basta con unos pocos ejemplos aislados para aprenderla. Al ignorar lo anterior, se generan prácticas en las que se da por hecho que las matemáticas deben «aprenderse» al mismo tiempo que se «enseñan» (Ibíd., p.85).

Para mirar un poco más a fondo las características de las manipulaciones algebraicas de los estudiantes en los ambientes Lápis/Papel, se han reportado algunos errores en los trabajos de Sánchez (1997, p. 5), Socas y et. al. (1997, p. 21) y Camacho y et. al. (1996, p. 104) como el inadecuado uso del igual, las falsas generalizaciones, la extensión de propiedades y la tendencia de una enseñanza centrada en algunos ejemplos típi-

cos, con pocas representaciones semióticas y técnicas específicas. Lo anterior muestra el costo de aprendizaje de los algoritmos de Lápis/Papel para factorizar expresiones algebraicas y su escasa significación para los estudiantes.

La factorización de polinomios en ambientes CAS

Dentro de otros ambientes, como los generados por los Sistemas de Álgebra Computacional (CAS), la factorización de polinomios tiene un tratamiento diferente. Estos sistemas dan la factorización de cualquier expresión algebraica, ejecutando uno de sus comandos al ingresar la expresión, ya sea en los racionales, reales o complejos (Ver figura 1).

Para ingresar la expresión algebraica es necesario que el estudiante conozca la sintaxis de entrada, que en ocasiones es diferente a la

escritura a Lápis/Papel. Por ejemplo para escribir la expresión $x^2 + 2x + 4$, el exponente no se ingresa como superíndice, se necesita de anteponer al número 2 el símbolo ^, es decir la expresión se escribe como $x^2 + 2x + 4$. Sin embargo, la expresión una vez ingresa al sistema se observa de manera similar que en Lápis/Papel (ver figura 2). Este suceso se conoce como el fenómeno de Pseudo-transparencia, conflicto que se genera con lo que se ingresa y se ve en la pantalla del computador (Artigue, 1997). Este fenómeno está ligado a los procesos de transposición computacional, entendiéndose como las transformaciones que sufre un objeto matemático debido a las decisiones que son tomadas al diseñar un software, tales como la selección de una representación y un conocimiento estructurado o de los algoritmos a aplicar (Balacheff y Kaput, 1996).

Figura 1. Diferentes factorizaciones de polinomios en una TI-92

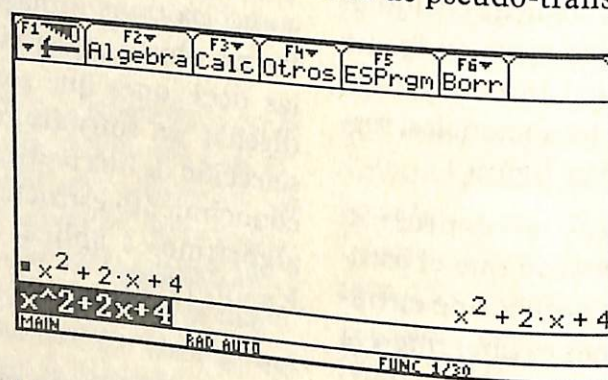
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	F17	F18	F19	F20	F21	F22	F23	F24	F25	F26	F27	F28	F29	F30	F31	F32	F33	F34	F35	F36	F37	F38	F39	F40	F41	F42	F43	F44	F45	F46	F47	F48	F49	F50	F51	F52	F53	F54	F55	F56	F57	F58	F59	F60	F61	F62	F63	F64	F65	F66	F67	F68	F69	F70	F71	F72	F73	F74	F75	F76	F77	F78	F79	F80	F81	F82	F83	F84	F85	F86	F87	F88	F89	F90	F91	F92	F93	F94	F95	F96	F97	F98	F99	F100	F101	F102	F103	F104	F105	F106	F107	F108	F109	F110	F111	F112	F113	F114	F115	F116	F117	F118	F119	F120	F121	F122	F123	F124	F125	F126	F127	F128	F129	F130	F131	F132	F133	F134	F135	F136	F137	F138	F139	F140	F141	F142	F143	F144	F145	F146	F147	F148	F149	F150	F151	F152	F153	F154	F155	F156	F157	F158	F159	F160	F161	F162	F163	F164	F165	F166	F167	F168	F169	F170	F171	F172	F173	F174	F175	F176	F177	F178	F179	F180	F181	F182	F183	F184	F185	F186	F187	F188	F189	F190	F191	F192	F193	F194	F195	F196	F197	F198	F199	F200	F201	F202	F203	F204	F205	F206	F207	F208	F209	F210	F211	F212	F213	F214	F215	F216	F217	F218	F219	F220	F221	F222	F223	F224	F225	F226	F227	F228	F229	F230	F231	F232	F233	F234	F235	F236	F237	F238	F239	F240	F241	F242	F243	F244	F245	F246	F247	F248	F249	F250	F251	F252	F253	F254	F255	F256	F257	F258	F259	F260	F261	F262	F263	F264	F265	F266	F267	F268	F269	F270	F271	F272	F273	F274	F275	F276	F277	F278	F279	F280	F281	F282	F283	F284	F285	F286	F287	F288	F289	F290	F291	F292	F293	F294	F295	F296	F297	F298	F299	F300	F301	F302	F303	F304	F305	F306	F307	F308	F309	F310	F311	F312	F313	F314	F315	F316	F317	F318	F319	F320	F321	F322	F323	F324	F325	F326	F327	F328	F329	F330	F331	F332	F333	F334	F335	F336	F337	F338	F339	F340	F341	F342	F343	F344	F345	F346	F347	F348	F349	F350	F351	F352	F353	F354	F355	F356	F357	F358	F359	F360	F361	F362	F363	F364	F365	F366	F367	F368	F369	F370	F371	F372	F373	F374	F375	F376	F377	F378	F379	F380	F381	F382	F383	F384	F385	F386	F387	F388	F389	F390	F391	F392	F393	F394	F395	F396	F397	F398	F399	F400	F401	F402	F403	F404	F405	F406	F407	F408	F409	F410	F411	F412	F413	F414	F415	F416	F417	F418	F419	F420	F421	F422	F423	F424	F425	F426	F427	F428	F429	F430	F431	F432	F433	F434	F435	F436	F437	F438	F439	F440	F441	F442	F443	F444	F445	F446	F447	F448	F449	F450	F451	F452	F453	F454	F455	F456	F457	F458	F459	F460	F461	F462	F463	F464	F465	F466	F467	F468	F469	F470	F471	F472	F473	F474	F475	F476	F477	F478	F479	F480	F481	F482	F483	F484	F485	F486	F487	F488	F489	F490	F491	F492	F493	F494	F495	F496	F497	F498	F499	F500	F501	F502	F503	F504	F505	F506	F507	F508	F509	F510	F511	F512	F513	F514	F515	F516	F517	F518	F519	F520	F521	F522	F523	F524	F525	F526	F527	F528	F529	F530	F531	F532	F533	F534	F535	F536	F537	F538	F539	F540	F541	F542	F543	F544	F545	F546	F547	F548	F549	F550	F551	F552	F553	F554	F555	F556	F557	F558	F559	F560	F561	F562	F563	F564	F565	F566	F567	F568	F569	F570	F571	F572	F573	F574	F575	F576	F577	F578	F579	F580	F581	F582	F583	F584	F585	F586	F587	F588	F589	F590	F591	F592	F593	F594	F595	F596	F597	F598	F599	F600	F601	F602	F603	F604	F605	F606	F607	F608	F609	F610	F611	F612	F613	F614	F615	F616	F617	F618	F619	F620	F621	F622	F623	F624	F625	F626	F627	F628	F629	F630	F631	F632	F633	F634	F635	F636	F637	F638	F639	F640	F641	F642	F643	F644	F645	F646	F647	F648	F649	F650	F651	F652	F653	F654	F655	F656	F657	F658	F659	F660	F661	F662	F663	F664	F665	F666	F667	F668	F669	F670	F671	F672	F673	F674	F675	F676	F677	F678	F679	F680	F681	F682	F683	F684	F685	F686	F687	F688	F689	F690	F691	F692	F693	F694	F695	F696	F697	F698	F699	F700	F701	F702	F703	F704	F705	F706	F707	F708	F709	F710	F711	F712	F713	F714	F715	F716	F717	F718	F719	F720	F721	F722	F723	F724	F725	F726	F727	F728	F729	F730	F731	F732	F733	F734	F735	F736	F737	F738	F739	F740	F741	F742	F743	F744	F745	F746	F747	F748	F749	F750	F751	F752	F753	F754	F755	F756	F757	F758	F759	F760	F761	F762	F763	F764	F765	F766	F767	F768	F769	F770	F771	F772	F773	F774	F775	F776	F777	F778	F779	F780	F781	F782	F783	F784	F785	F786	F787	F788	F789	F790	F791	F792	F793	F794	F795	F796	F797	F798	F799	F800	F801	F802	F803	F804	F805	F806	F807	F808	F809	F810	F811	F812	F813	F814	F815	F816	F817	F818	F819	F820	F821	F822	F823	F824	F825	F826	F827	F828	F829	F830	F831	F832	F833	F834	F835	F836	F837	F838	F839	F840	F841	F842	F843	F844	F845	F846	F847	F848	F849	F850	F851	F852	F853	F854	F855	F856	F857	F858	F859	F860	F861	F862	F863	F864	F865	F866	F867	F868	F869	F870	F871	F872	F873	F874	F875	F876	F877	F878	F879	F880	F881	F882	F883	F884	F885	F886	F887	F888	F889	F890	F891	F892	F893	F894	F895	F896	F897	F898	F899	F900	F901	F902	F903	F904	F905	F906	F907	F908	F909	F910	F911	F912	F913	F914	F915	F916	F917	F918	F919	F920	F921	F922	F923	F924	F925	F926	F927	F928	F929	F930	F931	F932	F933	F934	F935	F936	F937	F938	F939	F940	F941	F942	F943	F944	F945	F946	F947	F948	F949	F950	F951	F952	F953	F954	F955	F956	F957	F958	F959	F960	F961	F962	F963	F964	F965	F966	F967	F968	F969	F970	F971	F972	F973	F974	F975	F976	F977	F978	F979	F980	F981	F982	F983	F984	F985	F986	F987	F988	F989	F990	F991	F992	F993	F994	F995	F996	F997	F998	F999	F1000	F1001	F1002	F1003	F1004	F1005	F1006	F1007	F1008	F1009	F1010	F1011	F1012	F1013	F1014	F1015	F1016	F1017	F1018	F1019	F1020	F1021	F1022	F1023	F1024	F1025	F1026	F1027	F1028	F1029	F1030	F1031	F1032	F1033	F1034	F1035	F1036	F1037	F1038	F1039	F1040	F1041	F1042	F1043	F1044	F1045	F1046	F1047	F1048	F1049	F1050	F1051	F1052	F1053	F1054	F1055	F1056	F1057	F1058	F1059	F1060	F1061	F1062	F1063	F1064	F1065	F1066	F1067	F1068	F1069	F1070	F1071	F1072	F1073	F1074	F1075	F1076	F1077	F1078	F1079	F1080	F1081	F1082	F1083	F1084	F1085	F1086	F1087	F1088	F1089	F1090	F1091	F1092	F1093	F1094	F1095	F1096	F1097	F1098	F1099	F1100	F1101	F1102	F1103	F1104	F1105	F1106	F1107	F1108	F1109	F1110	F1111	F1112	F1113	F1114	F1115	F1116	F1117	F1118	F1119	F1120	F1121	F1122	F1123	F1124	F1125	F1126	F1127	F1128	F1129	F1130	F1131	F1132	F1133	F1134	F1135	F1136	F1137	F1138	F1139	F1140	F1141	F1142	F1143	F1144	F1145	F1146	F1147	F1148	F1149	F1150	F1151	F1152	F1153	F1154	F1155	F1156	F1157	F1158	F1159	F1160	F1161	F1162	F1163	F1164	F1165	F1166	F1167	F1168	F1169	F1170	F1171	F1172	F1173	F1174	F1175	F1176	F1177	F1178	F1179	F1180	F1181	F1182	F1183	F1184	F1185	F1186	F1187	F1188	F1189	F1190	F1191	F1192	F1193	F1194	F1195	F1196	F1197	F1198	F1199	F1200	F1201	F1202	F1203	F1204	F1205	F1206	F1207	F1208	F1209	F1210	F1211	F1212	F1213	F1214	F1215	F1216	F1217	F1218	F1219	F1220	F1221	F1222	F1223	F1224	F1225	F1226	F1227	F1228	F1229	F1230	F1231	F1232	F1233	F1234	F1235	F1236	F1237	F1238	F1239	F1240	F1241	F1242	F1243	F1244	F1245	F1246	F1247	F1248	F1249	F1250	F1251	F1252	F1253	F1254	F1255	F1256	F1257	F1258	F1259	F1260	F1261	F1262	F1263	F1264	F1265	F1266	F1267	F1268	F1269	F1270	F1271	F1272	F1273	F1274	F1275	F1276	F1277	F1278	F1279	F1280	F1281	F1282	F1283	F1284	F1285	F1286	F1287	F1288	F1289	F1290	F1291	F1292	F1293	F1294	F1295	F1296	F1297	F1298	F1299	F1300	F1301	F1302	F1303	F1304	F1305	F1306	F1307	F1308	F1309	F1310	F1311	F1312	F1313	F1314	F1315	F1316	F1317	F1318	F1319	F1320	F1321	F1322	F1323	F1324	F1325	F1326	F1327	F1328	F1329	F1330	F1331	F1332	F1333	F1334	F1335	F1336	F1337	F1338	F1339	F1340	F1341	F1342	F1343	F1344	F1345	F1346	F1347	F1348	F1349	F1350	F1351	F1352	F1353	F1354	F1355	F1356	F1357	F1358	F1359	F1360	F1361	F1362	F1363	F1364	F1365	F1366	F1367	F1368	F1369	F1370	F1371	F1372	F1373	F1374	F1375	F1376	F1377	F1378	F1379	F1380	F1381	F1382	F1383	F1384	F1385	F1386	F1387	F1388	F1389	F1390	F1391	F1392	F1393	F1394	F1395	F1396	F1397	F1398	F1399	F1400	F1401	F1402	F1403	F1404	F1405	F1406	F1407	F1408	F1409	F1410	F1411	F1412	F1413	F1414	F1415	F1416	F1417	F1418	F1419	F1420	F1421	F1422	F1423	F1424	F1425	F1426	F1427	F1428	F1429	F1430	F1431	F1432	F1433	F1434	F1435	F1436	F1437	F1438	F1439	F1440	F1441	F1442	F1443	F1444	F1445	F1446	F1447	F1448	F1449	F1450	F1451	F1452	F1453	F1454	F1455	F1456	F1457	F1458	F1459	F1460	F1461	F1462	F1463	F1464	F1465	F1466	F1467	F1468	F1469	F1470	F1471	F1472	F1473	F1474	F1475	F1476	F1477	F1478	F1479	F1480	F1481	F1482	F1483	F1484	F1485	F1486	F1487	F1488	F1489	F1490	F1491	F1492	F1493	F1494	F1495	F1496	F1497	F1498
----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Algunos CAS hacen parte de las aplicaciones de las Calculadoras Simbólicas o Calculadoras Graficadoras Algebraicas, cuya característica principal es la portabilidad y la posibilidad de conexión de diversas aplicaciones, permitiendo trabajar con diversas representaciones como lo numérico y lo gráfico.

Al igual que con la aparición de las calculadoras aritméticas, el uso de las Calculadoras simbólicas se considera un riesgo en los grados de escolaridad en donde los estudian-

tes están aprendiendo a realizar las manipulaciones algebraicas (Ralston, 1999 y Trouche, 2002, p. 21). Algunos creen que el uso de los CAS llevará al desuso de las técnicas¹ de Lápiz/Papel e inclusive se afirma que algunos contenidos matemáticos encasillados a procesos de difícil aprendizaje como la factorización de polinomios tenderá a su extinción en los currículos de matemáticas, esta concepción ha sido reportado por Demana y Waits (2000 a).

Figura 2. Ejemplo del fenómeno de pseudo-transparencia



Sin embargo, las investigaciones recientes muestran diferentes posibilidades para el aprendizaje de la factorización de polinomios en ambientes que integran CAS y Lápiz/Papel (LP) (Kieran, 2005 y Lagrange, 2000). Aunque ambos

ambientes parecen de difícil combinación, se ha considerado que este es un campo propicio para la integración de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC), problemática poco investigada².

¹ Dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), las técnicas son consideradas como los diferentes modos de hacer o resolver un problema o tarea.

² En el artículo de Artigue y otros (2003) se muestra que el 5% de las publicaciones respecto al uso de CAS en la educación matemática se interesa en la integración del CAS y lápiz y papel.

La Factorización de Polinomios en Ambientes Cas y L/P

Algunos investigadores como Waits y Demana (2000 b) y Peschek (2005) afirman que no es necesario enseñar los métodos tradicionales del álgebra simbólica (métodos manuales de lápiz y papel) porque los CAS permiten la manipulación algebraica más rápida y con mayor exactitud de lo que era posible con los métodos «tradicionales» que eran los únicos existentes, generándose posibilidades para el estudio de la teoría subyacente, como el teorema fundamental del álgebra (p. 197).

En concordancia con lo anterior, Vizmanos (2000, p. 191) afirma que en un futuro el interés girará en torno a las estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como la resolución de problemas. Por lo que una de las tareas será el planteamiento de ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a contextos cercanos e interesantes a los estudiantes (Ibíd., p. 192).

Sin embargo, la investigación realizada por Lagrange (2000, p. 17) reporta que generalmente los estudiantes perciben los CAS como herramientas para efectuar cálculos penosos y comprobar los resultados conseguidos. Pocos estudiantes ven

los CAS como herramientas de comprensión, de aprendizaje, que es el objetivo propuesto por los profesores y una fracción importante de estudiantes consideran que los CAS complican notablemente su trabajo matemático, en la puesta en obra del software, a menudo no anticipadas por el profesor.

Por otra parte los profesores ven que los CAS no suprimen las dificultades calculatorias que ellos esperaban, siendo difícilmente administrados en las actividades de experimentación. Estos resultados son indicios de la poca integración de los CAS en las prácticas de enseñanzas.

Usualmente, la mayoría de los artículos relacionados con el uso de CAS muestran las potencialidades de su uso (Artigue y otros, 2003). Dejando de lado los problemas y restricciones que generan los ambientes CAS y que son necesarios prever para una integración adecuada en el diseño de situaciones de aula. Algunos fenómenos didácticos, pueden generar un contexto enriquecedor para el aprendizaje de la factorización de polinomios, como en el caso del fenómeno de doble referencia ligado al proceso de transposición computacional, expuesto en las actividades elaboradas por Mounier y Aldon (1996) en la factorización de expresiones de la forma $x^n - 1$ y reportadas por Kieran (2005) como un ejemplo que ratifica

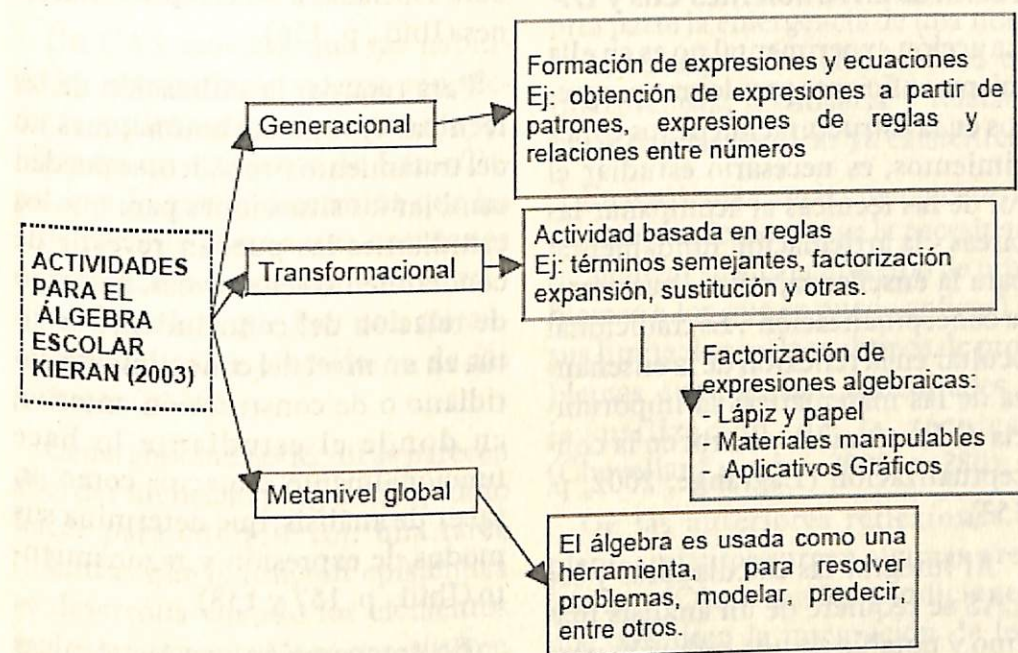
la necesidad de interpretar las respuestas dadas por un CAS en ambientes de LP.

El desarrollo de las situaciones determinó que las expresiones arrojadas por la calculadora no coincidían con la expresión general de estos polinomios bajo las técnicas de Lápis/Papel. Esto hace que los estudiantes vean la necesidad de reconciliar los resultados de Lápis/Papel y CAS. Conllevando a conjeturar y probar una regla para factorizar. De esa manera, el uso de CAS en las tareas generó la necesidad de entender ciertos aspectos relacionados con la factorización, promoviéndose los conocimientos y habilidades operativas y otros procesos como la argumentación, la obtención de reglas de manipulación de expresiones algebraicas y la comunicación. Lo novedoso de las situaciones es que hacen uso de otras funcionalidades de las Calculadoras Simbólicas con relación a las manipulaciones algebraicas.

En las investigaciones reportadas por Kieran (2003) las actividades transformacionales como la factorización poco utilizan las TIC y sólo en algunos casos se presenta el uso de los aplicativos de graficación de funciones; por lo que las tareas³ de factorización con el uso de HOME de una calculadora TI-92 son una alternativa diferente para el desarrollo de las actividades transformacionales y el uso de CAS.

Kieran (2003) determina tres tipos de actividades en el álgebra escolar, descritos en la figura 3. Generalmente las investigaciones que hacen uso de las TIC tienden a privilegiar sus aplicaciones gráficas más que las relacionadas con las manipulaciones de las expresiones algebraicas, por lo que la propuesta de Mounier y Aldon (1996) evidencia una manera diferente de integración de los CAS que genera necesidades las habilidades operativas de lápiz/papel.

Figura 3. Actividades del álgebra escolar



Es importante rescatar que las posibilidades de tratamiento y conversión de representaciones es mucho más rápida con el uso de Calculadoras Simbólicas que con LP.

Lagrange (2000) menciona que con el uso de las TIC se generan unas nuevas técnicas, que denomina como novedosas o instrumentales, que son inmediatas y de menos tiempo que las técnicas habituales (en ambientes LP). Por lo cual es necesario aprovechar el sentido y los alcances de estas actividades en el álgebra escolar.

Por otra parte, al considerarse innecesario los conocimientos y habilidades operativas se incurre en un peligro para usar CAS, porque el estudiante no está en condiciones para interpretar los resultados que este arroja. Por lo que las técnicas habituales de lápiz y papel no desaparecen de la actividad de los estudiantes, porque pueden ser un soporte para una reflexión teórica sobre los objetos que manipulan. Esto crea las oportunidades para el desarrollo de nuevas praxeologías⁴ (Ibíd., p.27).

³ En la TAD corresponde a lo que hay que hacer o resolver, como una situación problema.

⁴ Las praxeologías en la TAD se les considera como toda obra humana que surge como respuesta a un conjunto de cuestiones y como un medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas (Gascón, 1998, p. 11).

La Conceptualización y las Técnicas en Ambientes Cas y L/P

La acción experimental no es en ella misma suficiente para lograr progresos en la estructuración de los conocimientos, es necesario estudiar el rol de las técnicas al acompañar las tareas - la articulación fundamental para la enseñanza, entre la acción y la conceptualización-. Es tradicional ocultar en la reflexión de la enseñanza de las matemáticas la importancia de las técnicas y su rol en la conceptualización (Lagrange, 2002, p. 153).

Al integrar las calculadoras y los CAS se requiere de un análisis más fino y notable en una reflexión para las técnicas que, no son simples habilidades, sino que están ligadas a diferentes representaciones de objetos matemáticos y que juega en si un rol en la conceptualización. Es de interés mirar en las herramientas novedosas los cambios en la actividad matemática cotidiana de los alumnos, desde la utilización de las técnicas más inmediatas como «presionar botón» (Ibíd. p. 155).

Las técnicas del tipo «presionar botón» tiende a imponerse por ser simples y eficaces. Sin embargo los estudiantes tienden a asociar un concepto a su comando correspondiente. Este efecto negativo para la conceptualización puede ser evitado si los estudiantes se reencuentran cotidianamente con situaciones que

utilizan otras técnicas de la calculadora asociadas a otras representaciones (Ibíd., p. 156).

Para retardar la utilización de las técnicas «presionar botón», más no del tratamiento simbólico, se pueden cambiar las situaciones para que los estudiantes las puedan revestir de conocimiento «enactivos». Este tipo de relación del conocimiento se sitúa en un nivel del conocimiento cotidiano o de construcción anterior, en donde el estudiante lo hace funcionalmente «en acto» como un saber de análisis, que determina sus modos de expresión y razonamiento (Ibíd., p. 157 y 158).

En comparación con las técnicas Lápiz/Papel (L/P) que comportan varios gestos de los cuales cada uno necesita al menos en el período que precede la rutinización al menos de una acción concerniente, las técnicas de una calculadora TI 92 efectúa en un solo comando una reducción completa de estas. Por lo que la conceptualización y la manera de cuales estos podrían tomar no serán las mismas en los dos ambientes (p. 164). Sin embargo las interacciones de las técnicas novedosas (en CAS) y las habituales (en L/P) muestran las ricas potencialidades de las praxeologías que permite las herramientas informáticas. Las funciones de las diferentes técnicas de ambos ambientes y de las situaciones bien construidas pueden ayudar a la

emergencia de las comprensiones novedosas (p. 170).

Un CAS muestra que las habilidades manipulatorias, que son técnicas rutinizadas, tiene un mayor lugar en un ambiente de Lápiz/Papel, por lo que se determina que las TIC permite pasar a una enseñanza directamente conceptual. Por lo tanto se considera que hay una restauración del valor epistémico de las técnicas (p. 165).

Generalmente las técnicas parecen abordar un hecho pragmático, cómo hacer para cumplir con una tarea mientras que la función epistémica se desarrolla cuando los elementos que son manipulados se constituyen en objetos de un ambiente teórico (p. 166).

En cuanto al trabajo del profesor las nuevas técnicas que devienen del uso de los CAS hacen que profundi-

ce su enseñanza en función de las nuevas técnicas que dispone. Por otra parte la emergencia de una nueva técnica provoca la necesidad de interpretarla, justificarla y relacionarla con las técnicas ya existentes.

En particular con la emergencia de una nueva técnica surge la necesidad de analizar su alcance (el tipo de problemas a los que se puede aplicar) y sus limitaciones (los subtipos de problemas que plantean dificultades a la utilización de la técnica) (Chevallard y otros, 2000, p. 280).

De las anteriores reflexiones y planteamientos surgen algunas preguntas: ¿Cómo son las condiciones que permiten la integración de los CAS en las prácticas de enseñanza de la factorización de polinomios? ¿Cuáles son las tareas y las técnicas que se desarrollan en una ambiente LP y CAS?

Bibliografía

- ARTIGUE, M. (1997) Le logiciel 'Derive' comme revelateur de phenomenes didactiques lies a l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. En: *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 33, No 2, pp. 133-169.
- ARTIGUE, M. (2002 a). L'intergracion de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques. En: *Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions. pp. 277-349.
- ARTIGUE, M.; LABORDE, C; L, LAGRANGE y TROUCHE, L. (2003) Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En: *Second International Handbook of Mathematics Education*, Gran Bretaña: Editorial: Kluwer Academic Publishers. Gran Bretaña. pp. 239-271.
- BALACHEFF, N., KAPUT, J. (1996) Computer-Based learning environments mathematics. Citado por Garzón, D. (2006) En: *International Handbook of Mathematics Education*. VA. Kluwer Academic Publisher. pp. 469-505.
- CAMACHO, M.; SOCAS, M. PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1996) Iniciación al álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Editorial síntesis. p. 104
- DEMANA, F. y WAITS, B. (2000 a) El Papel de la Computadora Portátil El Álgebra Simbólica en la Educación Matemática en el Siglo XXI: ¡Un llamado para la acción. Disponible en www.t.com/calc/spain/articulobertwaits.htm visitado en octubre 2002.
- DEMANA, F. y WAITS, B. (2000 b) Computadores: en el salón de clase: una mirada hacia al futuro. En: *Papel de las calculadoras en el salón de clase*. Bogotá: Una empresa Docente. pp. 195-201
- GASCÓN, J. (1998). Evolución didáctica de las matemáticas como disciplina científica. En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/1, nº 52, pp. 7-33.
- KIERAN, C. (2003). The transition from arithmetic to algebra: a model for conceptualizing school algebra and the role of computer technology in supporting the development of algebraic thinking. En: *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual*. Centros de investigación y estudios avanzados. IPN. México.
- KIERAN, C. (2005) Interpreting and assessing the answers given by the CAS expert: a reaction paper. En: *CAME*. Virginia. E.U.A. Disponible en Internet: <http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4>
- LAGRANGE, J. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement: une approche par les techniques. En: *Educational Studies in Mathematics* Vol. 43 No 1, pp. 1-30.
- LAGRANGE, J. (2002) Les outils informatiques entre «sciences mathématiques» et enseignement. Une

difficile transposition? En: *Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions. pp.89-116.

MOUNIER, G. y ALDON, G. «Un problem story: factorizations de $x^n - 1$ ». Citado por Lagrange (2000). En: *International Derive Journal* Vol. 3 No 3. pp. 51-61.

PALAREA, Mercedes y SOCAS, Martín. (1997) Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. En: *Revista Uno. Lenguajes algebraicos*. Nº 14. Octubre. p. 21

PESCHEK, W. (2005) The impact of CAS on our understanding of mathematics education. En *CAME*. Virginia. E.U.A. Disponible en Internet: <http://www.lonklab.ac.uk/came/events/CAME4>

RALSTON, A. (1999). Por la Abolición de las Matemáticas de Lápiz y Papel. Dis-

ponible en Internet: <<http://tetis.d5.ud.es/edumat/abolición.html>>.

SÁNCHEZ, E. (1997). El graficador como apoyo a la comprensión conceptos algebraicos. Documento no publicado México: CINVESTAV-IPN.

TROUCHE, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En: *Calculatrices Symboliques transformer du travail informatique: un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, éditions. pp. 187-214.

VIZMANOS, J. (2000) ¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas? En: *Papel de las calculadoras en el salón de clase*. Bogotá: Una empresa Docente. pp. 185-194.

Una Perspectiva de la Gestión del Profesor en Clases de Matemáticas: Retos y Tensiones

MARISOL SANTACRUZ RODRÍGUEZ

Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle
IE José Ma. Córdoba, Yumbo

Hace varios años la Misión de Ciencia, Educación y Desarrollo (Aldana y otros, 1996) le hizo al país un llamado de atención frente a la pertinencia y coherencia del sistema educativo colombiano, frente a las exigencias de la sociedad del siglo XXI.

En lo referente a las matemáticas, se destacó que, a pesar de distintos esfuerzos materializados, principalmente en el desarrollo de políticas educativas, es eminente que su enseñanza se caracteriza por ser fragmentada y acrítica, desactualizada e inadecuada.

En esta perspectiva, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) plantea el desarrollo de evaluaciones externas a los estudiantes colombianos, especialmente en las áreas de Matemáticas y Lenguaje, tales como las pruebas *Saber y Censales*.

El objeto de la realización de estas pruebas es brindar perspectivas a las instituciones educativas para el mejoramiento de la formación de sus estudiantes. Estas demandas en el caso del área de matemáticas, se han cristalizado en la necesidad imperante de transformar las prácticas de enseñanza, lo cual se traduce en nuevos retos profesionales para los profesores.

Un análisis de los resultados de estas evaluaciones, en lo relativo al área de Matemáticas, pone de manifiesto la gran distancia entre lo propuesto en los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencias (2006) y los desempeños de los estudiantes. Dichos resultados constituyen una aproximación a los conocimientos construidos por los estudiantes, sobre todo el tipo de matemáticas que aprenden y las condiciones bajo las que las aprenden.

Ante este panorama la atención se ha dirigido hacia los profesores de matemáticas de todos los niveles (porque el profesor de preescolar o de primaria que enseña los primeros números y los nombres de las formas también es profesor de matemáticas) y especialmente, en los procesos de formación de los profesores, pues se hace visible la diferencia entre lo que saben y saben hacer los profesores y las expectativas so-

ciales frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En el ámbito internacional, investigadores de la talla de Luis Rico, han reconocido que la formación de profesores de matemáticas, a todos los niveles escolares es una necesidad prioritaria, de hecho se ha concluido que la formación de profesores de matemáticas constituye una apremiante urgencia educativa.

En este sentido, se ha planteado que una manera de explorar las necesidades básicas en la formación de los profesores de matemáticas, es describir las «competencias deseables» de dichos profesores en el ámbito profesional, es decir, las *competencias profesionales* que han de poner en juego los profesores de matemáticas, para desarrollar su trabajo en las instituciones educativas.

Dichas competencias profesionales se articulan con el Conocimiento Profesional del Profesor (CPP) deseable, donde se parte de reconocer que las prácticas de enseñanza, especialmente lo referente a la toma de decisiones antes, durante y después de su intervención en el aula, se relaciona con la naturaleza de las situaciones a las que se enfrenta el profesor y los diferentes componentes del CPP: el saber académico, teorías implícitas, principios, creencias y rutinas de acción (Porlán y Rivero, 1998).

La dicotomía es que dicho conocimiento deseable es diferente del conocimiento dominante, el cual se caracteriza por yuxtaponer los componentes del CPP, logrando una desconexión entre el discurso del profesor y sus prácticas.

A continuación se dará una mirada a las competencias profesionales de los profesores de matemáticas, es decir al CPP deseable y hacia donde apunta nuestra perspectiva de la intervención, es decir, de la gestión, que hace el profesor en la clase de matemáticas.

Acerca de las competencias profesionales de los profesores de matemáticas: algunos retos

Respecto a la noción de *competencia* existen variadas acepciones. Particularmente vamos a entender que las competencias, en particular las *competencias profesionales* de los profesores de matemáticas¹, se han convertido en un concepto que articula investigaciones y reformas curriculares internacionales en curso, con base en las cuales se expresan las prioridades

¹ Es decir, aquellas relacionadas con un campo profesional particular, que en nuestro caso es la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares, el cual como todo campo profesional, requiere de una formación específica relacionada con determinado campo de conocimiento científico, el cual se reconoce como Didáctica de las Matemáticas.

formativas de los profesores de matemáticas y del sistema educativo en general, y un modo instrumental de entender los procesos institucionales en que éstas se sustentan (Rico, 2004).

Dichas competencias profesionales, se adquieren en parte, durante la etapa de la formación inicial, en las escuelas normales o en las universidades. Pero esta formación inicial, aunque de vital importancia, no es suficiente. La experiencia profesional construida a lo largo de años de práctica docente y la participación en procesos de cualificación permanente, constituyen espacios fundamentales en la formación de los profesores. Se puede concluir que la formación inicial y la formación permanente, resultan complementarias y deben guardar estrecha relación, con el fin de contribuir significativamente al proceso de formación de profesores de matemáticas.

Desde hace varios años (Porlán y Rivero, 1998) se ha hecho evidente que en la formación tanto inicial como continuada de los profesores de matemáticas, existen creencias sobre qué debe saber un profesor de matemáticas y cómo debe aprenderlo.

Generalmente se supone que si el profesor aprende aspectos básicos de las teorías científicas propias de su profesión, se encuentra en capacidad de enseñar. Esta concepción resulta

ingenua, pues ignora que el profesor requiere integrar estos saberes y reinterpretarlos en relación con sus necesidades profesionales.

Pero no somos un caso aislado respecto a las necesidades en cuanto a la formación de profesores. En España por ejemplo, se puede encontrar una situación más o menos similar. Los investigadores españoles han reconocido la complejidad en cuanto a la formación de profesores de matemáticas y la incidencia de esto en los desempeños de los estudiantes:

«Nos encontramos con la inexistencia de un plan de formación de profesores de matemáticas, que sea algo más que unas consideraciones pedagógicas generales y desarticuladas. La ausencia de un plan de profesores que contemplen los avances sobre currículo de matemáticas, la incorporación de nuevas tecnologías y los procesos de aprendizaje basados en competencias, dificultan el trabajo de los profesores de matemáticas, que carecen de modelos claros de planificación de su trabajo, basado en un conocimiento profundo de la didáctica de las matemáticas. Mientras no se aborden de manera rigurosa los planes de formación (inicial y continuada), de profesores de matemáticas, con su especificidad profesional, el fracaso escolar está garantizado. (Recio y Rico, 2005)».

Aunque se asume que las competencias profesionales de los profesores de matemáticas, es un tema complejo e intrínsecamente relacionado con los procesos de formación de profesores, hemos decidido describir dichas competencias alrededor de tres ejes fundamentales; el primero relacionado con la *actividad matemática* de los profesores, el segundo sobre el conocimiento del campo disciplinar de la *didáctica de las matemáticas*, es decir, sobre los procesos de producción y comunicación de los saberes matemáticos en el contexto escolar (Brousseau, 1991), y finalmente, la *gestión de la clase* por parte del profesor, la cual se relaciona estrechamente con las dos anteriores e incluye una reflexión del profesor sobre su propio quehacer.

La actividad matemática del profesor de matemáticas, es un punto clave en los procesos de formación inicial y debería mantener este protagonismo en los programas de formación continuada. La formación matemática del profesor es un tema ineludible, ya que influye profundamente sus prácticas profesionales.

Muchos de los conocimientos matemáticos construidos por los profesores en ejercicio, se remontan a su formación de carácter superior en las facultades de educación, no obstante, en la práctica profesional de los profesores se observa que su

formación matemática, puede resultar bastante prolífica en algunos aspectos, pero escasa en otros absolutamente necesarios.

En varios programas de cualificación de docentes adelantado por el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, se ha observado por ejemplo algunos aspectos críticos de la formación de los profesores de preescolar, primaria, secundaria e incluso de media, sobre todo en lo referente a la geometría, los sistemas de medidas, la estadística y aritmética. Por tal motivo se optó por incluir, de manera transversal en el desarrollo de los programas de cualificación, una discusión acerca del objeto matemático, sus características y naturaleza bajo la premisa de que es necesario conocer de manera profunda el objeto de enseñanza con el fin de propiciar el aprendizaje.

Pero tener una concepción amplia y satisfactoria del objeto matemático, en representación del saber cultural priorizado para ser enseñado y aprendido, aunque es un elemento necesario, no es suficiente para definir el oficio de profesor de matemáticas. La formación matemática no garantiza de manera exclusiva que los profesores sean capaces de contextualizar los saberes matemáticos objetos de enseñanza, los cuales constituyen una red de complejas relaciones de carácter

epistemológico, histórico, social y cultural, con el objeto de hacerlos comprensibles para sus estudiantes.

De manera generalizada entre los profesores, se piensa que entre más matemáticas se sepa, se es mejor profesor (Vasco, 1998), lo cual puede interpretarse como un desconocimiento de nuestra propia labor, pues no se reconoce el momento que se está viviendo en el aula, ni se está haciendo matemáticas, ni se está comunicando con matemáticos profesionales (Romero & otros, 2002). Se podría llegar a decir incluso que hay un desconocimiento sobre los procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1991) y la naturaleza de los objetos matemáticos en contextos escolares.

Es necesario que el profesor realice una actividad matemática continua, pero de manera ineludible, debe articular a ella un conocimiento acerca de su disciplina específica: la didáctica de las matemáticas. En este sentido, se articulan las competencias alrededor de la actividad matemática y el conocimiento la Didáctica de las Matemáticas, las cuales definen el centro de la caracterización del profesor de matemáticas como profesional relacionado con un campo particular de conocimientos científico.

Cabe anotar además que el CPP en el campo de la Didáctica de las Matemáticas le obliga a un conocimiento

profundo del objeto matemático, pues es absolutamente reconocido que no se puede hacer un ejercicio de ella dejando de lado el objeto matemático (Brousseau, 1991).

Estas competencias profesionales respecto a la Didáctica de las Matemáticas, no deben entenderse como «habilidades para enseñar», sino en un sentido complejo como competencias con base en un conocimiento científico, frente a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Se incluirían en esta categoría las competencias vinculadas con la actividad de enseñar matemáticas en contextos escolares, lo cual relaciona una triada de actividades profesionales importantes.

El primer elemento de esta triada se relaciona con las decisiones respecto a *qué matemáticas enseñar* en determinados contextos, *cómo enseñarlas* para promover el aprendizaje y *cómo evaluar los aprendizajes* de los estudiantes. Dicha triada también podría relacionarse con la organización particular de la clase, es decir con la gestión del profesor, con su intervención en el aula, pero al mismo tiempo la trasciende, ya que no se circunscribe a la clase, sino que se proyecta al ámbito de la institución educativa.

Sobre el primer aspecto de la triada, es decir sobre las matemáticas que el profesor decide enseñar, podemos decir, que se encuentra re-

lacionado con la noción de *Currículo*, en particular con una idea compleja de éste, donde el CPP del profesor se relaciona con la concepción y desarrollo del Proyecto de área de Matemáticas, que debe diseñarse en cada institución educativa y especialmente con el propósito de contribuir, desde el área de matemáticas, en la formación de ciudadanos en el contexto particular en el cual se inscribe la institución educativa.

Esta competencia refiere al CPP de matemáticas respecto a la posibilidad de construir un discurso coherente, que le posibilite argumentar sobre sus decisiones respecto a las matemáticas que deben enseñarse en la institución educativa, respondiendo a las necesidades y expectativas sociales frente a la formación matemática de los estudiantes, qué formas de pensamiento priorizar, además plantear secuencias de trabajo en el aula, determinar tiempos y actividades particulares.

Es también importante que el profesor construya una posición crítica frente a las propuestas curriculares vigentes en Colombia, tales como Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Calidad (2003), respecto al área de Matemáticas, lo que le posibilita un diálogo con el conocimiento profesional de su dominio y le da herramientas para cristalizar su trabajo en la institución educativa.

Sobre el segundo aspecto de la triada, es decir respecto al conocimiento de la didáctica de las matemáticas, podemos decir que se relaciona sobre la competencia del profesor para mediar en los aprendizajes de sus estudiantes, y es alrededor de este aspecto, que se va a entender la gestión del profesor, es decir su intervención en un contexto de clase.

La construcción del conocimiento matemático por parte de los estudiantes es un reto que involucra que el profesor diseñe situaciones de aprendizaje y las ponga en juego. Respecto a esto se involucra el conocimiento profesional del profesor con relación a algunos aspectos teóricos sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Por último, la gestión de la clase se relaciona con la competencia del profesor para evaluar el aprendizaje de sus estudiantes, es decir valorar las potencialidades y avances de éstos, pero también sus dificultades, con el fin de determinar las acciones que posibiliten al estudiante para superar sus dificultades. La evaluación permite que el profesor logre determinar la mejor manera de tratar la diversidad en el aprendizaje de las matemáticas de sus estudiantes.

Tanto la actividad matemática del profesor, como su conocimiento frente al campo de la Didáctica de

las Matemáticas, son aspectos trascendentales e íntimamente relacionados alrededor de las competencias profesionales del mismo. En este sentido, es necesario distinguir un proceso clave de la actividad profesional del profesor: su intervención en el contexto del profesor en la clase, es decir, sus prácticas profesionales. La gestión de la clase aparece como un constructo donde se hace visible la articulación que hace el profesor de sus saberes, experiencias y expectativas.

La Gestión de la clase de matemáticas: una perspectiva de la intervención

Por muchos años las prácticas de los profesores de matemáticas en las aulas han sido objeto de investigación a nivel internacional. Ahora sabemos que las prácticas, no son ingenuas en lo absoluto sino que están mediadas por la formación del profesor y especialmente por sus concepciones sobre qué son las matemáticas, cómo deben aprenderse y cómo deben enseñarse (Gil y Rico, 2002). En este sentido se destaca la relación entre las concepciones de los profesores acerca de las matemáticas y sus implicaciones en la intervención del profesor en el aula.

Las prácticas de los profesores, mediadas por sus concepciones y creencias, se cristalizan en determinadas organizaciones que plantean

en sus clases. A esta dinámica u organización de la clase, la denominaremos gestión de la clase de matemáticas, la cual hace parte fundamental de las competencias profesionales del profesor de matemáticas y está relacionada con la actividad matemática del profesor y de manera muy especial con la competencia frente al campo disciplinar de la Didáctica de las Matemáticas.

La gestión de la clase constituye uno de los aspectos más importantes y decisivos en la actividad profesional del profesor de matemáticas en las instituciones educativas. Tanto para profesores novatos, como experimentados, la organización de la clase, los propósitos que se movilizan en la misma, el tipo de actividades que se ponen en juego y el control de las interacciones entre los actores participantes, son variables con las que los profesores trabajan cotidianamente.

Aunque se reconoce que la organización de la clase es, en gran medida, responsabilidad de cada profesor, el tipo de organización general de la institución educativa, en la cual éste se desenvuelve y determinadas decisiones tomadas desde los distintos niveles administrativos, pueden influir directa o indirectamente en ella.

El trabajo en grupo de los estudiantes o el trabajo individual son

aspectos importantes en la forma de organización de la clase. El poder obtener un referente de su propia práctica, por parte de un profesor, puede ayudarle a entender las diversas maneras en las que se organizan sus clases y comprender cómo se comunica con sus estudiantes.

Un mismo profesor puede utilizar distintas estrategias de organización del aula, incluso puede usar varias de ellas para una misma clase. Los profesores pueden hacer presentaciones, mediar en debates, e incluso, participar en acaloradas discusiones. Este tipo de organización junto con el trabajo individual de los estudiantes han sido estrategias muy utilizadas para la enseñanza de las matemáticas. Pero para los estudiantes puede ser beneficioso el aprendizaje cooperativo que se puede producir cuando trabajan en grupos porque pueden ayudarse unos a otros. En esta perspectiva, el trabajo en grupo puede considerarse como un medio para el desarrollo social, afectivo y cognitivo de los estudiantes.

Para abordar las competencias profesionales del profesor de matemáticas relacionadas con la gestión de la clase, se van a hacer evidentes dos competencias particulares. Por un lado aquellas competencias relacionadas con la evaluación que el profesor hace de su propia práctica y por otro lado las competencias

frente a la gestión de la clase relacionada con la actividad de enseñar matemáticas.

Las competencias vinculadas con la evaluación de su propia práctica, se relacionan con la planificación y evaluación del trabajo por parte del mismo profesor. Los profesores de matemáticas deben ser competentes para planificar su propio trabajo. Programar la propia acción educativa es una tarea fundamental para el profesor. Esta competencia incluye la del trabajo en grupo con otros compañeros, para planificar, programar y coordinar la actividad docente de manera conjunta, al interior del proyecto de área de matemáticas desarrollado en la institución educativa.

El profesor evalúa su propio trabajo y en consecuencia, toma las decisiones, apelando a criterios didácticos que considere más adecuados en determinadas circunstancias. De esto se entiende que una actividad inherente a una enseñanza de calidad es la investigación.

Una formación inicial adecuada debe de incluir entre sus objetivos que el profesor sea competente para, basándose en la reflexión sobre su propia práctica, planificar secuencias didácticas coherentes y desarrollar, en el ámbito de sus posibilidades, diversas investigaciones que le permitan mejorar la calidad de su enseñanza.

En este sentido, promover de manera más efectiva el aprendizaje de sus estudiantes.

Las competencias para la gestión en el aula, supone un ámbito complejo en que se dan interacciones múltiples en las que se deben construir el aprendizaje, pero donde también surgen conflictos y situaciones, muchas veces impredecibles, que el profesor debe saber tratar. Aprovechar el dinamismo de ese complejo de relaciones en beneficio de los aprendizajes de los estudiantes es una actividad importante y complicada.

El profesor de matemáticas debe por tanto ser competente para analizar la interacción entre sus estudiantes, lo que incluye poseer conocimientos generales sobre los estudiantes, como sujetos cognoscentes en proceso de aprendizaje.

El aprendizaje en el ámbito escolar, es un proceso complejo, por ello es importante también que el profesor sea capaz de liderar el grupo y dinamizarlo de manera que las interacciones del grupo contribuyan significativamente al aprendizaje.

En definitiva, se considera que la organización del aula, en clases de matemáticas, debe adaptarse a las distintas situaciones de aprendizaje de los estudiantes. El profesor debe ser competente para organizar de manera adecuada el aula para estas

diferentes situaciones educativas: trabajo en pequeños grupos, trabajo individual, puesta en común, exposiciones individuales o grupales de los estudiantes, entre otras, donde se prioricen los procesos comunicativos y se abra un espacio al debate y la discusión en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos por parte de los estudiantes.

Un par de conclusiones importantes

Definitivamente estamos frente a retos importantes respecto al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Nuestro interés debe ser ahora la formación continua ya sea participando en pro-

gramas de cualificación, en nuestras instituciones educativas o de manera independiente.

El cambio en nuestras prácticas en el aula, la evolución de nuestras concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, se hacen evidentes en la intervención que hacemos en el aula, en la gestión que hacemos de la clase y en la cual se ve reflejada nuestras competencias profesionales como profesores de matemáticas.

Un conocimiento profundo de nuestra labor, de nuestra profesión, es el eje fundamental para hacer frente a las nuevas demandas y contribuir de manera decisiva en la formación de nuestros estudiantes como ciudadanos.

Bibliografía

- ALDANA, E. y otros (1996) Colombia al filo de la oportunidad. Misión de ciencia, educación y desarrollo. Bogotá: Colciencias.
- BROUSSEAU, M. (1991) ¿Qué pueden aportar a los docentes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? Burdeos: Universidad de Burdeos.
- CHEVALLARD, I. (1991) La transposition didactique. Du savior savant au savior enseigné. Grenoble: La pensée sauvage.
- GIL, F. y RICO, L. (2002) Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En: Revista Enseñanza de las Ciencias. Vol. 21 No. 1. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- RECIO, T y RICO, L. (2005) El informe PISA 2003 y las matemáticas. En prensa: El País (España). Enero 24 de 2005.
- ROMERO, J. y otros. (2002) Matemáticas para todos. El sentido de la profesión profesor(a) de matemáticas. Centro de investigaciones y desarrollo científico Bogotá: Fondo de publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- RICO, L. (2004) Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Revista Curriculum y formación de profesorado Vol.8. No. 1. Granada: Universidad de Granada.
- COLOMBIA (2006) Competencias básicas en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- COLOMBIA (1998) Lineamientos Curriculares. Matemáticas. Bogotá: Editorial Magisterio.
- VASCO, C. (1998) Visión de conjunto de la Pedagogía de las Matemáticas como disciplina en formación En: Matemáticas Enseñanza Universitaria. Revista de la ERM. Vol. VII, No. 1. Bogotá.

La Conversión de las Representaciones: Uno de los dos Procesos Fundamentales del Pensamiento*

RAYMOND DUVAL

Traducción por: Pamela Londoño Bonilla**

Estudiante del ciclo complementario con Énfasis en Educación Matemática de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali y de la Licenciatura en Lenguas Extranjeras de la universidad del Valle. Cali, Colombia 2008.

Hay una paradoja cognitiva del pensamiento matemático. Se refiere al papel central y ambivalente que juegan las representaciones semióticas en las démarches¹ matemáticas.

docente que acompañó y colaboró con la estudiante en este trabajo estuvo conformado por los profesores(as): María Fernanda Mejía, Jorge Galeano, Carlos Julio Posso y William Rodríguez. ¹ Siguiendo lo planteado por la profesora Myriam Vega en la traducción del libro Semiosis y Pensamiento Humano de Duval (1995), el término démarche no tiene un significado en español que cubra el mismo campo semántico que en francés. Dice la traductora: «Luego de ensayar distintas alternativas, no encontramos un término que en español cubra el mismo campo semántico del término francés Démarche. Duval usa frecuentemente este término para designar todo lo que alguien hace para llegar a un resultado, incluidas todas las tentativas y las falsas pistas abandonadas. Démarche tiene múltiples sentidos; en general, se emplea para aludir al modo como se desenvuelve alguien, a su «manera de caminar». Tiene algo en común con el término

* Tomado de: http://www.pug.fr/extrait_ouvrage/Econversion.pdf. Disponible en internet, visitado el 24 octubre de 2007.

**Esta traducción es producto del trabajo colaborativo a partir del curso Razonamiento Matemático I y II del Ciclo Complementario con énfasis en Educación Matemática de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali. El equipo

Las dificultades a las cuales la mayoría de los alumnos se enfrentan en su aprendizaje lo ponen netamente en evidencia. Por un lado, toda actividad matemática implica el recurso de las representaciones semióticas, porque los objetos estudiados no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente, como en los otros dominios del conocimiento científico.

Pero, por otra parte, los objetos matemáticos no deben ser confundidos con las representaciones utilizadas. ¿Cómo los alumnos pueden no confundir los objetos y las representaciones semióticas dadas, si no tienen acceso a estos objetos por fuera de las representaciones semióticas?

Dos características distinguen el papel central y particular de las representaciones semióticas en matemáticas. En primer lugar, no se les

procedimiento, pero Démarche remite no solo a lo que un individuo hace sino también a lo que trata de hacer, por tanto, tiene una significación más global y menos impersonal que procedimiento. También podrían traducirlo estrategia y trayectoria, pero resultan igualmente inadecuados, puesto que Démarche no remite a nada metódico ni estrictamente fijo, como estos términos pueden hacerlo. Por último, tampoco hemos optado por trámites o gestiones, en razón de que podría resultar de confusa comprensión usar tales términos en un ambiente distinto al administrativo, en el que se emplean habitualmente». Tomado de Duval, Raymond. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Pp. 17. Traducido en 1999 por Myriam Vega. Universidad del Valle. Cali Colombia.

utiliza para evocar los objetos, o para comunicar, sino para poder efectuar tratamientos, es decir, razonamientos, cálculos, etcétera.

Dicho de otra manera, las representaciones semióticas son importantes sólo en la medida en que pueden ser transformadas en otras representaciones. Por tanto, se recurre a diferentes tipos de representaciones semióticas, pues todos los sistemas semióticos no brindan las mismas posibilidades de tratamiento.

Es decir, el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones semióticas, sino la capacidad de pasar de un registro de representación semiótico a otro registro.

Se ve entonces que las démarches matemáticas movilizan cognitivamente dos tipos de transformaciones de representaciones semióticas. Existen las transformaciones efectuadas en el interior de un mismo registro, como un cálculo en el mismo sistema de representación de los números o como el enriquecimiento de una figura geométrica para encontrar la solución de un problema. Y existen las transformaciones que consisten en cambiar de registro de representación, como en el paso de una formulación verbal o numérica a una escritura algebraica o a una representación cartesiana de las relaciones formuladas.

Estos dos tipos de transformaciones son fuentes independientes de incompreensión o de bloqueo para los alumnos, pero son las segundas las que constituyen el umbral decisivo para llegar a comprender en matemáticas. Para designar estos dos tipos de transformaciones, he empleado respectivamente los términos «tratamiento» y «conversión» (Duval, 2006a, 2006b). ¿Por qué elegir la palabra «conversión», que es semánticamente sobredeterminada, y no otra como, por ejemplo, «codificación?» (Jakobson, 1963).

La elección de una palabra para designar el paso de la representación de un objeto a otra representación de este objeto no es neutra. Implícitamente o explícitamente, esta elección compromete una hipótesis sobre la naturaleza de los procesos cognitivos que le permiten a un sujeto efectuar tal transformación y, también, sobre su lugar en el conjunto del funcionamiento del pensamiento.

En otros términos, la elección de una palabra no remite solamente a la manera de calificar una clase particular de proceso, sino también a la manera de situarlo entre los otros tipos de procesos cognitivos que permiten el ejercicio del pensamiento y el desarrollo del conocimiento: desarrollo periférico o desarrollo central, condición o consecuencia, entre otros.

Aquí no se va solamente de la palabra al concepto, sino de la palabra a un modelo o a una teoría. Son las razones de la elección de la palabra «conversión», para calificar el paso de un tipo de representación a otro, lo mismo que las preguntas y las perspectivas de esta elección para el análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento, que voy a presentar aquí.

Empezaremos por mostrar por qué la heterogeneidad de las representaciones semióticas plantea un problema cognitivo de comprensión que es crucial para toda teoría cognitiva del funcionamiento del pensamiento, aunque su complejidad a menudo sea desconocida en la enseñanza de las matemáticas y en las investigaciones psicológicas.

Examinaremos luego las características cognitivas del paso de la representación de un objeto a otra representación de este objeto, por el cambio del sistema de representación.

Veremos entonces por qué la palabra «conversión» respeta la complejidad cognitiva de este paso: no reversibilidad, ausencia de reglas de codificación, variación de la «distancia cognitiva» en función de la naturaleza de los dos registros de representación entre los cuáles se efectúa el paso. Estas características cognitivas explican la irreductibilidad, para la enseñanza, de la diversidad de los re-

gistros de representación utilizados en las démarches matemáticas.

Por último, abordaremos la pregunta más general de la modelización del funcionamiento del conocimiento y de su desarrollo en el ser humano.

La comparación de los grandes modelos que han sido propuestos conduce a distinguir dos grandes tipos de modelización según el lugar central que dan a la conciencia o, por el contrario, a una «arquitectónica» de facultades, de estructuras o de instancias, de las que la conciencia sería sólo el resultante. Los modelos que privilegian la conciencia del sujeto son aquellos que analizan el desarrollo y la adquisición de los conocimientos en una perspectiva educativa y epistemológica.

La palabra «conversión» aparece para designar una operación fundamental para el acceso del sujeto a una verdadera comprensión. En el otro tipo de modelización, por el contrario, la operación de conversión no tiene ninguna pertinencia. El análisis del funcionamiento cognitivo implicado en la actividad matemática muestra la necesidad de una modelización que va más allá de este paso. La conversión de las representaciones semióticas remite a la vez a una práctica consciente creadora y a los desarrollos no-conscientes del pensamiento.

Los elementos del problema de un análisis cognitivo del conocimiento matemático

Un fenómeno cognitivo fundamental:

La movilización y la articulación de representaciones heterogéneas

Para poner este fenómeno en evidencia, basta con tomar dos ejemplos, uno en el dominio de los medios y el otro en matemáticas, donde se tiene la costumbre, no sólo de recurrir a representaciones diferentes, sino igualmente de yuxtaponerlas. La comparación de estos dos ejemplos permite ver la complejidad de los problemas cognitivos que la sola diversidad de las representaciones plantea.

• *La paradoja de una doble yuxtaposición para presentar una «misma cosa»: yuxtaposición del objeto real y de una de sus representaciones, y yuxtaposición de varias representaciones de este objeto real.*

Se conoce la célebre fotografía titulada «una y tres sillas» que fue realizada por Kosuth en 1965. Resulta de un montaje en el que son yuxtapuestas: una silla situada contra un muro, una foto de esta silla contra el muro que se fija al lado de la silla real y, al otro lado, la fotografía de un texto

que define la palabra «silla». Se podría enriquecer este montaje agregándole la fotografía de un montaje de esta silla en kit o aún trazar sobre el muro las flechas entre estas diferentes fotografías como para realizar una red conceptual. Tendríamos entonces una yuxtaposición que podría titularse: una y cinco sillas. Este montaje por yuxtaposición pone pues en escena dos tipos de relación que plantean dos problemas cognitivos diferentes (Duval, 2006b).

- El problema de la relación entre una representación y el objeto que ella representa. Es sobre la naturaleza de esta relación que el análisis del conocimiento no cesa de interrogarse desde Platón (2002, 509d-510e, 516a). ¿Existencia o no existencia de los objetos representados? ¿Algún parecido o ningún parecido con los objetos representados? y, en caso de ningún parecido, ¿cómo pasar de la representación al objeto representado, que es el objeto de conocimiento? Así, estas últimas preguntas se encuentran en el corazón de los debates psicológicos y pedagógicos sobre los aportes respectivos del lenguaje y las imágenes o sobre el hecho de saber si una imagen vale más que una explicación verbal.

- El problema de la relación entre una representación de cierto tipo y una representación de otro tipo. ¿Cómo se pasa de una representación a la otra? ¿Cómo puede saberse que dos representaciones diferentes representan, o no representan, el mismo objeto? Esta pregunta llama menos la atención, porque generalmente se arregla para remitir de nuevo este problema de la relación entre dos representaciones diferentes al problema anterior. Lo que, evidentemente, supone que puede llegarse de otra manera a los objetos a parte de las representaciones, es decir que puede yuxtaponerse el objeto mismo y una de sus representaciones. ¿Pero qué pasa, cuando los objetos de conocimiento se vuelven inaccesibles y no se puede acceder a ellos más que por las representaciones semióticas?

De estos dos problemas, es el segundo el que se revela como el más crucial para el análisis de los procesos de conocimiento, pues en la mayoría de las situaciones, es imposible llevar de nuevo a la situación del primer problema, como por ejemplo en matemáticas siendo esto el mayor desafío de su enseñanza.

• *Una sola yuxtaposición es posible en matemáticas: aquella entre las representaciones semióticas.*

Las matemáticas presentan dos características cognitivas que las distinguen de los otros conocimientos. Por un lado son ellas las que utilizan la gama más extensa y más heterogénea de representaciones semióticas.

Por otra parte los objetos matemáticos no son accesibles por fuera de las representaciones semióticas. De donde el recurso en paralelo a diferentes tipos de representaciones se usa para intentar volver más accesibles

los objetos que no son accesibles por fuera de los sistemas de representación.

Se encuentran, por ejemplo, los cuatro tipos siguientes de representaciones, yuxtapuestos en una misma página consagrada en la introducción de la noción de función lineal a partir de la proporcionalidad (Mollet-Petit, 1992, p. 134). Esta yuxtaposición no tiene nada de exhaustivo, pues se tendría también que recurrir a los esquemas sagitales entre dos conjuntos de elementos.

Figura 1: Yuxtaposición de representaciones para volver accesible lo que es una función lineal.

ENUNCIADOS (PROPIEDADES O DEFINICIONES)	CUADRO DE PROPORCIONALIDAD	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	ECUACIÓN								
1. Para toda situación de proporcionalidad, si x es transformado en y, existe un número que no tiene dependencia de x tal que $y = ax$. Se dice que se pasa de x a y por la función lineal $y = ax$... 2. La representación gráfica de una función lineal es una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas. Se dice que $y = ax$ es la ecuación de la recta asociada a esta función lineal.	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>-5</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr> <td>y</td><td>-15</td><td>3</td><td>6</td></tr> </table> × 3	x	-5	1	2	y	-15	3	6		$y = ax$
x	-5	1	2								
y	-15	3	6								

Observemos antes que nada las dos grandes diferencias que separan esta media página de un manual y la fotografía: «una y tres sillas». Antes que nada, en el montaje realizado por Kosuth, las diferentes representaciones de una silla pueden ser yuxtapuestas con el objeto mismo, es decir, con una silla sobre la que uno puede sentarse. Lo que no es más el caso aquí, puesto que no se puede acceder al objeto nocional, o a la idealidad, «función lineal» sin utilizar previamente una u otra de las representaciones de una función lineal. Entonces, el montaje realizado por Kosuth, yuxtapone una representación no semiótica, (una fotografía), y una representación semiótica, (un texto descriptivo). Aquí, por el contrario, todas las representaciones yuxtapuestas son semióticas, pues la posibilidad de yuxtaponer las representaciones semióticas y las representaciones no semióticas presupone un acceso perceptivo, o instrumental, al objeto estudiado.

Se considera a menudo que la multirepresentación, es decir la utilización en paralelo de representaciones diferentes, favorecería la comprensión. Esto es verdadero cuando una situación de doble yuxtaposición es posible. Es quizás verdadero cuando, en situación de una sola yuxtaposición posible, pueden asociarse las representaciones no semióticas y las representaciones semióticas.

En estos dos casos la referencia, en una experiencia directa del objeto o en una representación resultante de la puesta en presencia del objeto mediante un sistema físico productor de representaciones, (una cámara), sirve de referencia central para reconocer las representaciones como las representaciones de este objeto. ¿Pero qué sería de ello cuando la multirepresentación puede asociar sólo las representaciones semióticas, como en la Figura 2?

El recurso de esta cuádruple representación no puede favorecer la comprensión de lo que es una función lineal, si los alumnos no son ya capaces de ver cómo se pasa de un tipo de representación a otro. Este es entonces el nudo cognitivo del problema.

Por un lado, los contenidos respectivos de estas cuatro presentaciones de una función lineal no tienen nada en común entre ellos, (excepto las letras de variables y los números para los de ellas). El enunciado 1 no puede ser reducido a una simple descripción del cuadro de proporcionalidad, con motivo de la cuantificación que introduce, (en negrilla en el texto).

Por otra parte, uno no puede apoyarse sobre un conocimiento previo del objeto «función lineal», pues el acceso a este objeto pasa por estas representaciones. Desde luego puede declararse que este conocimiento puede ser «construido». ¿Pero tal construcción por los alumnos no reposaría en realidad sobre el aprendizaje de los diferentes pasos posi-

bles entre los diferentes tipos posibles de representaciones?

El problema de pasar de un tipo de representación a otro

El análisis del paso de un tipo de representación a otro exige pues, separar los diferentes tipos de representaciones semióticas movilizadas en matemáticas. Dos criterios de distinción deben ser tomados en cuenta.

El primero es clásico. Se refiere a la manera como las unidades significantes, constitutivas de las representaciones semióticas, son organizadas entre ellas. Para ello, hace falta distinguir las representaciones discursivas producidas en un lenguaje, es decir, la organización interna depende de reglas sintácticas y las representaciones no-discursivas que utilizan las propiedades de organización propias a las relaciones espaciales².

² Elegimos la expresión «representación no-discursiva» y no las palabras «imagen» o «icónico». «Imagen» es una palabra demasiado general y, en consecuencia, equívoca puesto que es utilizada también para distinguir las representaciones no semióticas como las fotografías, de las representaciones semióticas como las caricaturas, los esbozos, las figuras geométricas, los esquemas, los gráficos... Ahora, desde un punto de vista tanto cognoscitivo como semiótico, sus funcionamientos representativos son totalmente diferentes. La utilización de la oposición entre lenguaje e imagen es inapropiada para describir y para analizar la variedad considerable de los tipos de representaciones semióticas utilizadas en matemáticas. También el término lenguaje no permite distinguir las expresiones algébricas y los enunciados en lengua natural.

El segundo, en cambio es raramente tomado en cuenta y combinado con el primer criterio. Es relativo a la naturaleza de los tratamientos posibles, es decir de las transformaciones de una representación semiótica en otra del mismo tipo, como en una inferencia, un razonamiento, un cálculo, un anamorfosis, etcétera.

Así pues hay que distinguir las representaciones cuyas transformaciones no pueden ser definidas por un algoritmo, como por ejemplo todos los enunciados en lengua natural, de las que sí pueden ser definidas por un algoritmo, como por ejemplo todas las expresiones algebraicas.

El cruce de estas dos distinciones permite separar cuatro grandes tipos de representaciones semióticas³ (Duval 2006a), cada tipo debería permitir efectuar los tratamientos. Hemos llamado registros de represen-

³ En «los problemas fundamentales en el Aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del Desarrollo Cognitivo» (1992), Duval distingue cuatro tipos de registros de representaciones, ellas son: *Los registros discursivos*: los cuales utilizan una lengua, se pueden formular proposiciones o transformar expresiones. Permiten describir, inferir, razonar, calcular. *Los registros no discursivos*: muestran formas o configuraciones de formas así como organizaciones de este tipo de representaciones solo se puede tener una aprehensión sinóptica; permiten visualizar lo que nunca es dado de manera visible. *Los registros plurifuncionales*: los cuales se utilizan en todos los dominios de la vida cultural y social; y *Los registros monofuncionales*: son registros «derivados» de alguna manera especializados en un sólo tratamiento.

tación semiótica a los tipos de representación así distinguidos.

Esta clasificación sirve para poder poner en evidencia la importancia y la diversidad de los pasos de un tipo de representación a otro, cada tipo de paso determinaría por otra parte una variable cognitiva independiente.

Para un estudio de todos estos fenómenos, podemos distinguir por otra parte los casos explícitos y los casos implícitos.

Los casos explícitos: los cambios de registro practicados en la enseñanza

Retomemos el ejemplo anterior de la cuádruple representación de una función lineal (Figura 1). Utilizando la clasificación de los tipos de representación que acabamos de evocar, podemos comprobar (Figura 2):

- Que las diferentes representaciones yuxtapuestas por el manual corresponden a tres clases diferentes de registros de representación
- Pero que hace falta yuxtaponer un cuarto tipo de representación, una representación geométrica, para visualizar la noción de coeficiente designado por la letra a . En efecto, para una recta dada sobre una representación gráfica, el coeficiente de la función lineal corresponde a un triángulo rectángulo del que puede hacerse desli-

zar la hipotenusa a lo largo de la recta dada. Si se quiere «traducir» el enunciado en una representación no-discursiva, la sola representación gráfica no es cognitivamente suficiente.

Pero para que una multirepresentación pueda favorecer la comprensión, hace falta que los alumnos sean capaces de efectuar por ellos mismos los diferentes pasos entre las representaciones que se yuxtaponen o que se asocian por su puesta en paralelo.

Esta es la condición cognitiva para una comprensión «conceptual». Hemos representado con flechas algunos de los diferentes pasos que el alumno debe poder producir o reproducir por sí mismo para que la multirepresentación funcione cognitivamente y permita la comprensión matemática. No las tenemos todas marcadas. En particular no tenemos marcados los pasos en sentidos inversos, o «vuelta» que, cognitivamente, no son equivalentes a los pasos «ir». Y eso conduce a hacer las tres preguntas siguientes, que son muy raramente tomadas en cuenta tanto en la enseñanza como en los estudios didácticos:

- ¿La mayoría de los alumnos pueden efectuar por ellos mismos estos diferentes pasos?
- ¿El hecho de poder efectuar localmente un tipo de paso tiene un efecto de traslado sobre los otros tipos de paso?
- ¿El hecho de poder efectuar, en un sentido, el paso entre dos ti-

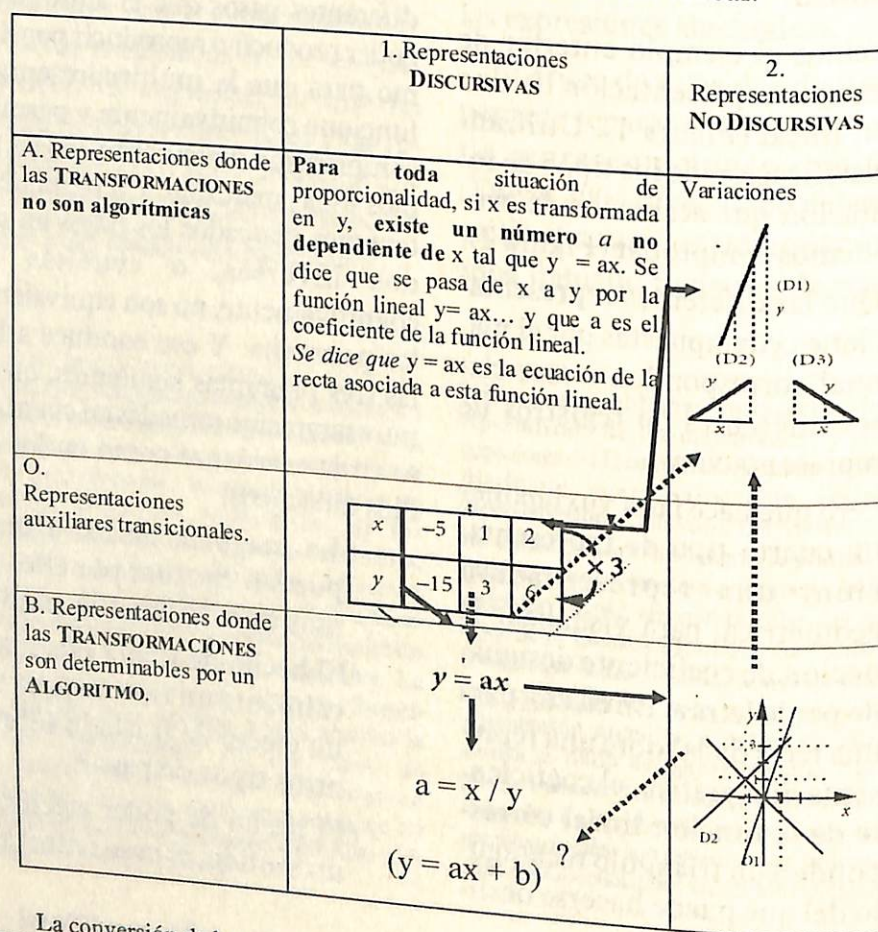
pos de representación, arrastra el hecho que se sea capaz de efectuar el paso en el otro sentido?

Estas preguntas son importantes para el análisis de los problemas de aprendizaje y de comprensión en matemáticas, como para la evaluación de las adquisiciones. Cada uno de los tipos de pasos que la clasificación de los registros de representación permite definir, constituye una variable independiente de naturaleza cognitiva. Y cuando se organizan las observacio-

nes o las experiencias en función de estas variables, se ve que la mayoría de los alumnos no pueden efectuar estos pasos (Duval, 2006a).

No basta con una multirepresentación, incluso explicada en clase, para que los alumnos reconozcan un mismo objeto representado con contenidos diferentes. Y lejos de ser la consecuencia de la adquisición de un concepto matemático, es de ello la condición. El primer umbral de comprensión, a menudo infranqueable, es el cambio de registro de representación.

Figura 2: Los pasos de un tipo de representación a otra, requiere la adquisición del «concepto» de función lineal.



• Los casos implícitos: la movilización simultánea de varios tipos de representación o la articulación de los registros de representación

No hay comprensión en matemáticas sin la capacidad de cambiar de tipo de representación. Pero esta exigencia cognitiva queda a menudo implícita en las actividades propuestas a los alumnos.

Están antes que nada algunos dominios, como la geometría, donde hace falta articular ininterrumpidamente por lo menos dos registros diferentes: un registro discursivo, (en lengua natural o en escritura simbólica), y un registro de representaciones visuales construibles instrumentalmente, (y diferente de los dibujos «icónicos»), lo que se llama «figura»; en geometría es típica esta dualidad de registros.

Están por un lado la representación visual que es fuente de démarches heurísticas puramente intuitivas y los enunciados que intervienen bajo la forma de hipótesis, de «propiedades», es decir de definiciones reducidas a un término. Ahora no se trata más allá de una simple yuxtaposición como en el ejemplo anterior, sino de una verdadera articulación, en la que hace falta pasar de un tratamiento puramente visual a un tratamiento discursivo e inversamente, para hacerlas fun-

cionar en sinergia (Duval, 2005). Se podría decir que las figuras geométricas requieren por lo menos dos tratamientos heterogéneos en paralelo.

Están luego todas las situaciones donde, un solo tipo de representación es movilizado explícitamente. Su comprensión requiere evidentemente que no se las confunda con los objetos representados, es decir que se separe lo que es pertinente en el contenido presentado por la representación. Ahora, como nosotros nunca podemos estar en una situación como la realizada por Kosuth, (supra p. 65), esta discriminación es posible sólo si se puede disponer de otra representación del mismo objeto y si se ve cómo pasar de una a la otra.

¿Por qué la palabra «conversión» para nombrar estos cambios de tipo de representación?

¿Por qué los términos «codificación» y «traducción» son inapropiados?

Son estos dos términos que vienen inmediatamente al pensamiento cuando hace falta transformar la representación semiótica de un objeto en una representación en otro registro semiótico. Pero estos dos términos son inapropiados, pues el paso de un tipo de representación a otro no tiene, desde un punto de vista cognitivo, nada de común con una práctica de codificación o de

traducción, porque aquí no hay ninguna regla de transformación y en los casos raros donde se encuentra una, ella no permite efectuar el paso inverso.

• *La codificación: una operación invertible en decodificación*

Tomemos la situación que podría ser considerada como una excepción a la regla: la construcción de las representaciones gráficas. Allí, la palabra «codificación» parece tener que imponerse, pues se apoya en una regla muy simple: a una pareja de números, se asocia un punto en un plano definido por dos ejes graduados y orientados. Esta regla permite, por ejemplo efectuar el paso:

Una ecuación del primer grado
→ una recta.

En efecto esta regla permite sólo pasar de una recta a una serie de puntos alineados. Y esto ocurre por una serie de leyes de organización perceptiva, o por las razones matemáticas que no son percibidas siempre por los alumnos, la cual transforma esta serie de puntos alineados en una recta.

Referente a la construcción de representaciones gráficas, debe observarse que la regla de codificación (susodicha) no permite decodificar. El paso inverso, (la flecha punteada sobre la figura 3 susodicha), se revela a la vez complejo y de naturaleza doble:

Figura 3: Una regla de codificación que no permite decodificar.

Aprehensión local	Puntos de un grafico → (1) Pareja de números → (2) ¿Cuál es la ecuación?
Discriminación global cualitativa	(1) regla de codificación (2) Un problema de aportar la ecuación Variables visuales pertinentes de un grafico → Categorías semánticas ⁴ Las notaciones algebraicas de la relación representada

La regla de codificación se limita a una aprehensión local y no permite encontrar la ecuación a partir de la cual una recta ha podido ser construida. Eso exige un tratamiento matemático de puesta en ecuación. Sin embargo, la posibilidad del paso inverso es indispensable para que las

representaciones gráficas tomen un valor intuitivo o se vuelvan un medio de control en el tratamiento de las expresiones algebraicas. Ahora esta posibilidad depende de un desarrollo independiente de la regla de codificación: la discriminación de las variables visuales pertinentes de

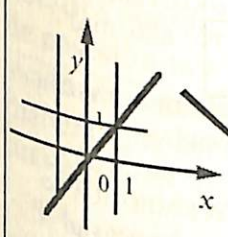
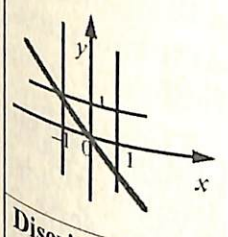
⁴ Los números y los tamaños representados por las notaciones algebraicas pueden ser categorizados por las oposiciones cualitativas: «más grande que 1» o «más pequeño que 1», «más grande que 0 o más pequeño que 0». Informaciones anteriores habían mostrado la dificultad de los alumnos para percibir esta categorización semántica esencial, para comprender las operaciones aditivas y multiplicativas, el significado de una letra que se encuentra reducida a la posibilidad de un instanciación.

la representación gráfica. Y este desarrollo basta para un reconocimiento inmediato, o casi inmediato, de la forma de la ecuación correspondiente a una representación gráfica dada.

Las observaciones muestran que el aprendizaje de la regla de codificación no permite efectuar el paso inverso. Para ponerlo en evidencia,

basta con proponer tareas de reconocimiento cualitativo como ésta (Figura 4). Hemos añadido, a título indicativo, los resultados registrados por un equipo de docentes con una población de 360 alumnos de 15-16 años, repartidos en 12 clases. Las proporciones entre paréntesis dan los resultados de la «mejor clase» del establecimiento.

Figura 4: Estructura y análisis de una tarea del paso de una representación a otra.

Tarea de reconocimiento cualitativo: elegir la expresión algebraica correspondiente a cada grafico	Variables visuales contrastivas ⁵ Correspondiente a las categorías semánticas de las notaciones algebraicas	
	$y = x$ $y = -x$ $y = x + 1$ $y = x - 1$ $y = -x + 1$ $y = -x - 1$ $y \geq x$	Sentido de la inclinación: <i>ascendente</i> (anclaje del sentido de la escritura) 39% (60%)
		Sentido de la inclinación: <i>descendente</i> 49% (70%)
Discriminación visual de dos gráficos: las dos elecciones a hacer constituyen una sola respuesta.	El contraste entre ascendentes y descendentes corresponde a la elección entre (+) y - para el coeficiente de la ecuación $y = ax$	33% (46%)

⁵ En un análisis semiótico los valores de significación son determinados por las oposiciones binarias (ascendente/descendente; más grande/más pequeña...) Hemos añadido un valor neutro (vertical u horizontal para la oposición ascendente/descendente; igual para la oposición más grande / más pequeño...)

Una «acierto» en el sentido de la ecuación $\rightarrow$ construcción del gráfico no arrastra ningún traslado cognitivo sobre el cambio inverso (Duval, 1988). El paso directo y el paso inverso recurren a operaciones

cognitivas diferentes. Más generalmente la complejidad del paso de las representaciones gráficas a las escrituras algebraicas puede ser descrita por el siguiente cuadro:

Figura 5: Complejidad de los pasos entre representaciones gráficas y escrituras algebraicas.

Tres maneras de VER	Lo que es OBSERVADO	Lo que es MOVILIZADO
APREHENSIÓN LOCAL por PUNTOS a partir de dos ejes graduados	los PUNTOS localizables sobre un plano cuadrículado, (la figura-fondo)	LA REGLA DE CODIFICACIÓN (y de construcción): punto de intersección $\Leftrightarrow$ pareja de números.
APREHENSIÓN ICÓNICA una imagen de tendencia	LOS DESPLAZAMIENTOS (ascendente/descendente) Con respecto a un nivel horizontal	UNA ANALOGÍA DE ORIENTACIÓN en el espacio físico: relieve del terreno (más alto, más bajo)
“DISCRIMINACIÓN CUALITATIVA DE OPOSICIONES VISUALES” ⁶ que distinguen dos gráficos de la misma forma o no (requerido para la visualización matemática)	Intrínsecos: DE LAS FORMAS D1 (rectas, curvas) O D2 (zonas) y extrínsecos: ORIENTACIÓN respecto a los dos ejes, y POSICIÓN de las intersecciones sobre los dos ejes. (figura-forma/figura fondo)	CORRESPONDENCIAS con las CATEGORÍAS SEMÁNTICAS de LA EXPRESIÓN SIMBÓLICA de una relación (funcional o no), entre dos variables

Llamemos aquí la concepción más general, que fue dominante entre los años 1960 y 1975, según la cual las lenguas serían los «códigos lingüísticos» (Jakobson, 1963), para

la comunicación de un mensaje entre un emisor y un destinatario. La comunicación lingüística sería el desarrollo de codificación de un mensaje por el emisor y de su

⁶ En los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del Desarrollo Cognitivo (1999), Duval plantea que la tercera manera de ver es una «Aprehensión global cualitativa», lo que aquí es llamado «DISCRIMINACIÓN CUALITATIVA DE OPOSICIONES VISUALES» se está refiriendo a lo mismo.

decodificación por el receptor. Se encuentra esta concepción en la terminología utilizada para definir las competencias, noción clave suficientemente explícita y articulada para poder ser codificada por una formulación lingüística.

En otros términos, la formulación mental se parece a una doble lingüística, claro que no vocalizada. Ahora el acto de expresión es la experiencia del contrario: «El acto de expresión, esta unión... del sentido lingüístico de la palabra y de la significación a la que apunta, no es para nosotros, locutores, una operación secundaria, en la que tendríamos recursos para comunicar al prójimo nuestros pensamientos, sino la toma de posesión por nosotros, la adquisición de significados que, de otra manera, nos están sólo sordamente presentes.

Si la tematización del significado no precede la palabra, es porque es el resultado. Si la palabra quiere encarnar una intención significativa que es sólo *cierto vacío*, esto no es sólo para recrear en el prójimo la misma falta o la misma privación, sino para saber que hay privación» (Merleau Ponty, 1960 p. 112-113). El paso del discurso interior a la expresión oral y el de la palabra a la expresión escrita constituye uno de los saltos cognitivos que exigen cada uno una reorganización semántica y sintáctica de lo que se cree ser

intencionalmente explícito en el pensamiento, lo mismo que Vygotski (1985) subrayó. Y esta reorganización, que es compleja, es creadora de sentido.

• *La traducción: un paso entre los sistemas semióticos homogéneos*

El término «traducción» remite en primer lugar a todos los pasos de una lengua a otra en los actos de comunicación verbal o en la difusión de los textos. Se refiere antes que nada a la variedad de las lenguas, vivientes o muertas, y no a la variedad de los sistemas semióticos de representación. Y desde un punto de vista cognitivo, es esencial no confundir, por ejemplo, la traducción de un texto francés en inglés, o en chino y su transformación en una secuencia de esquemas y de imágenes. El empleo metafórico del verbo «traducir» tiende a ocultar la diferencia profunda que separa estos dos tipos de paso.

Se podría, si acaso, hablar de «traducción» para el paso del enunciado, en griego o en francés, de una relación entre tamaños a la formulación de esta misma relación «en lenguaje algebraico moderno», como puede ser conducido a hacerlo en la lectura de los libros V de Euclides sobre las proporciones, (Dahan y Peiffer, 1986, p.59, 61). Pues, en los dos registros, las representaciones producidas son las representaciones discursivas y, además, no hay reducción de la información. En cambio,

eso se pone más difícil cuando se pasa de un enunciado de un problema que se refiere a una situación real a su reformulación en términos únicamente matemáticos para poder efectuar un cálculo (Vergnaud, 1976, Damm, 1992). Aquí, se trata más bien de «seleccionar» en vez de «traducir» las «informaciones pertinentes» para la resolución, y luego de eliminar muchas otras. Ahora eso plantea los obstáculos de otra naturaleza que son para los alumnos las dificultades de paso de una lengua a otra para traducir un texto.

Pues en una traducción la regla general es respetar la segmentación del texto en frases, y sus frases en proposiciones. En fin, decimos que una traducción (versión) permite generalmente una retroversión (tema), también imperfecta.

No podemos emplear pues los términos «codificación» y «traducción». El sentido de estos términos y las prácticas que designan son en realidad el opuesto de la variedad y de la complejidad de los pasos de un registro de representación a otro. Es por esto que he preferido tomar la palabra «conversión» que ya era utilizada para designar esta transformación revolucionaria en los medios de telecomunicación: la conversión de las señales analógicas en señales numéricas⁷, y la invención de «convertidores» con los circuitos integrados (Nowakowski y Roux, 1994).

Especificidad de la noción de conversión

La noción de conversión se opone a la de codificación, porque las operaciones que permiten convertir en un sentido no son suficientes para encontrar la representación de partida. Se opone a la de traducción porque el paso se hace entre sistemas de representación que son heterogéneos. Sin embargo, el punto esencial para comprender bien esta noción es ver que la conversión es un tipo de transformación de representación que no comporta verdaderamente reglas. Eso plantea una pregunta temible, la de la unificación de los cambios de registro de representación en la unidad de una misma démarche de conocimiento.

• Sin reglas de conversión, sólo las correspondencias a discriminar

La transformación de una representación en otra representación del mismo registro (un tratamiento), se hace según las reglas que corresponden a las posibilidades de funcionamiento del sistema y a las propiedades matemáticas representadas.

⁷ Decimos que esta conversión consiste en una serie de transformaciones y de operaciones complejas: transformación de una variación de la corriente en una serie de impulsos, muestrario según una frecuencia dependiente de la frecuencia de la señal que quiere convertirse, codificación numérica del muestrario.

Así, los algoritmos de cálculo pueden variar según el sistema de escritura numérica adoptado. Dicho de otra manera, las reglas de transformación remiten siempre al funcionamiento específico del sistema de representación en el interior del cual los tratamientos (cálculos, razonamientos, reorganizaciones visuales de gestalts...) son efectuados.

Es por esta razón que no se puede tener reglas de conversión para pasar de un sistema a otro. Suponerlo hace negar la heterogeneidad de los sistemas de representación y postular la existencia de un hipersistema, único y homogéneo, de representación en el cual la variedad de registros de representación realmente movilizados podría ser reducida fácilmente. Así, en la lógica de esta negación, se conduce a postular las representaciones mentales como puras (para el pensamiento humano), es decir, asemióticas y descontextualizadas, o a tomar como modelo la reducción al lenguaje binario en los cómputos.

El interés de la noción de conversión es justamente de no depender de reglas que la volverían operacional, o más bien de poner en evidencia las transformaciones de representaciones que escapan de toda regla.

Ahora bien, ellas son variadas y complejas, como se lo ha podido sugerir más arriba (Figura 2). Es esta

inexistencia de reglas que vuelve la aproximación de los fenómenos de conversión, fácilmente y constantemente observables, tan difícilmente comprensibles. En efecto, entre la representación de un objeto en un registro y la representación de este objeto en otro registro, deben existir ciertas correspondencias, si no las representaciones no podrían ser representaciones del mismo objeto y la conversión no sería posible. Pero entonces ¿cómo observar estas correspondencias?

Así, entre el gráfico de una función lineal y la escritura de la ecuación, las correspondencias cognitivas están entre ciertas variables visuales y las categorías semánticas de la ecuación, y no entre los números y los puntos (Figura 4). Yo he propuesto, en otra parte, un cuadro sistemático de esto (Duval, 1993 p.46). Pero en tal cuadro no doy «las reglas de correspondencia entre los registros» como a menudo eso ha sido interpretado (Grignon, 1996, p. 218). Dos razones se oponen. Antes que nada, tal cuadro de correspondencias puede ser visto, en las mejores condiciones, como el análogo de un léxico y cada uno sabe que un léxico no refleja en nada el funcionamiento propio a una lengua y no permite que se le apropie. Luego, y es la razón más importante, las correspondencias son indicadas entre las unidades significantes que no son inmediatamente aislables

como tales, es decir que no constituyen los elementos discretos que pueden ser reunidos en una representación.

Estas unidades significantes, por ejemplo, las variables visuales de un gráfico, se borran en la unidad de la representación gráfica y no son nunca visualmente separables. Así, para el gráfico de una función lineal, los valores de la variable visual «sentido de inclinación» respecto al eje horizontal y las de la variable «posición respecto al origen» no son separables: ellas se fusionan en la estimación de un cierto crecimiento o decrecimiento que es atado a la altura, a la parte superior del eje horizontal, del punto establecido por el registro. En realidad los valores de las diferentes variables visuales de un gráfico requieren cada vez de las operaciones de discriminación para poder ser identificadas.

Hasta en un enunciado, la separación en palabras, separación que puede amplificarse subrayando las palabras más importantes o las palabras claves, es engañosa para guiar la conversión de un enunciado. El ejemplo más elemental puede ser el de los problemas aditivos. Por un lado los términos antónimos empleados en el enunciado (ganar/perder, subir/bajar, más que/menos que), no pueden ser puestos sistemáticamente en correspondencia con las operaciones de adición y de sustracción respectivamente.

(Damm, 1992). Además, cuando estos dos términos son utilizados en un mismo enunciado, hace falta efectuar una adición, lo que es una fuente de fracaso sistemático, hasta para la mayoría de los futuros profesores de las escuelas. La ausencia de reglas para la conversión remite a la imposibilidad de una homogenización de los diferentes sistemas de representación, o a los diferentes campos de actividad, en un solo sistema de tratamiento, o en un solo campo de acción.

Lejos de ser una marca de insuficiencia o de fracaso, esta heterogeneidad irreducible de los registros de representación constituye al contrario una fuerza y una riqueza para el pensamiento. Pero plantea la pregunta que está en el corazón de todo desarrollo de conocimientos y de toda adquisición de conocimientos: ¿cómo la conversión se vuelve posible para un individuo y cómo el recurso de las representaciones heterogéneas puede conducir a la unidad de una démarche de conocimiento?

• ¿Cómo llegar a la discriminación de las unidades significantes de una representación en un tipo de registro?

Contrariamente a lo que una problemática en términos de conceptualización deja entender a menudo, la conversión no se hace al nivel de lo que cada representación representa, sino que las unidades significantes pertinentes constituyen el contenido de cada representación.

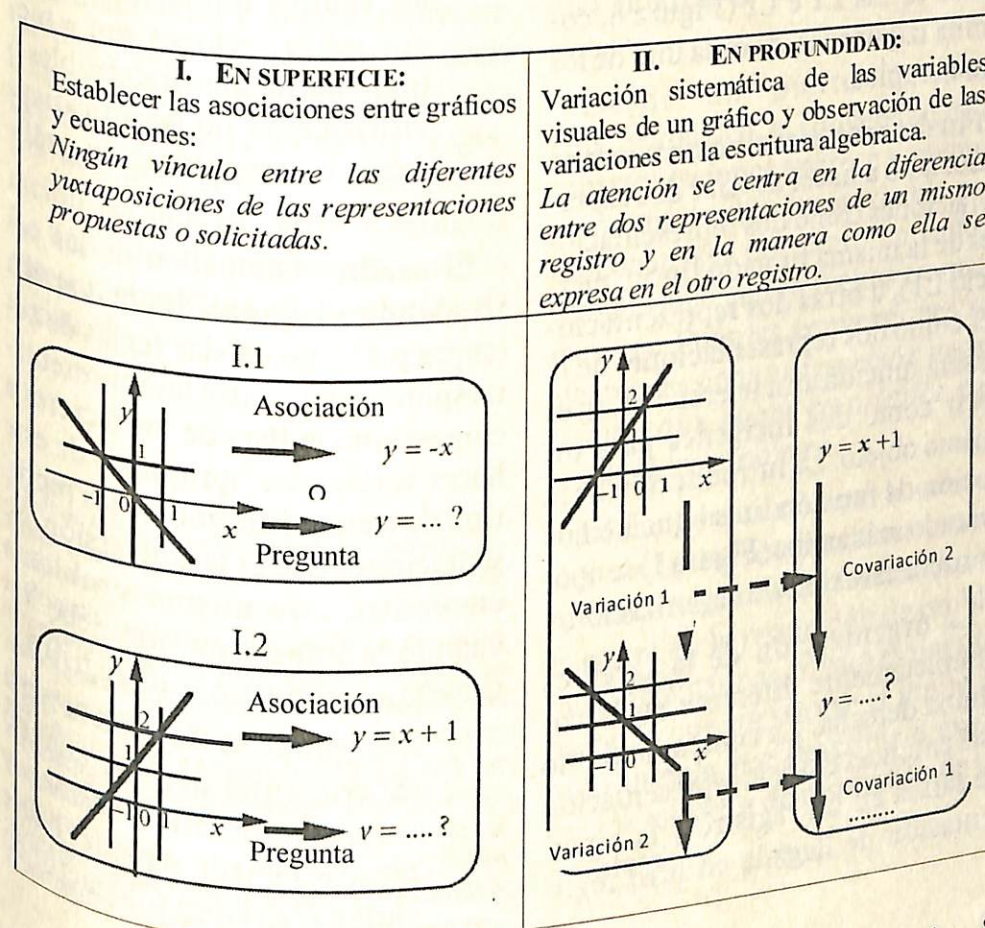
El problema real de la conversión se considera al hecho de que las unidades significantes no son separables de las otras unidades significantes, con las cuales se forma el todo de una representación: no puede aislárselas para encontrarlas en otra representación.

Dicho de otra manera, cada representación exige una operación de discriminación de sus unidades significantes pertinentes, operación que puede semejar a una exploración. La conversión no se hace apli-

cando las reglas ni siguiendo las tablas de correspondencias término a término, o término a imagen, como si se tratara de codificación o de traducción, sino entrando en una exploración casi experimental de variaciones.

Tanto en el análisis cognitivo del funcionamiento del pensamiento como en la organización de situaciones de aprendizaje, no se ha prestado quizás la suficiente atención al foso que separa los dos tipos de tareas siguientes:

Figura 6: Dos organizaciones opuestas de una actividad o de una tarea.



Tenemos a la izquierda un ejemplo de organización que se apoya, en primer lugar, sobre la puesta en registro de dos representaciones heterogéneas (la representación en el registro de salida y en el registro de llegada).

Se puede tener evidentemente tantas yuxtaposiciones disponibles como se quieran, en forma de ejercicios o de ejemplos, como los presentados en los manuales o en las fichas, o acudiendo a un programa que las produce.

Se observará entonces que nada incita a mirar las dos representaciones de salida I.1 e I.2 (Figura 6, columna izquierda), de cada uno de los dos ejemplos.

Finalmente, esta situación remite a asociar o a hacer asociar dos representaciones como dos representaciones de la misma función lineal (ejercicio I.1), u otras dos representaciones como dos representaciones de la misma función afín (ejercicio I.2), es decir como dos imágenes para un mismo objeto. La introducción de la noción de función lineal que hemos evocado más arriba (Figura 1) se apoya sobre este tipo de organización.

La organización de la tarea es completamente diferente en la columna derecha. La comparación no está entonces entre la representación de salida en un registro y la representación de llegada en otro registro.

Está entre una variación presentada en la representación de salida y una covariación eventual en la representación de llegada. Todo dependerá evidentemente de los factores de variación que se ponen en juego, o de las variables independientes que se manipulan. Y aquí dos precisiones son fundamentales:

- La primera concierne a la naturaleza de las variables: estas son las variables visuales cualitativas, es decir las variables en las que los valores están bien contrastados, que hace falta tomar en cuenta y no de los valores numéricos de los que las variaciones son a menudo las menos discernibles o visualmente no significativas sobre la representación gráfica.

El cuadro sistemático de las correspondencias evocadas más arriba (supra p.81), no da «las reglas de correspondencia» entre las representaciones, sino la lista de los factores a hacer variar para apropiarse de este tipo de transformación de las representaciones que es la conversión. Se encuentra este mismo problema cuando la transformación debe hacerse entre otros tipos de registro.

- El segundo se refiere a la regla experimental de base cuando varios factores intervienen y no se les puede separar: hacer variar a la vez un solo factor en

el registro de salida. Puede observarse lo mismo que en la sucesión de los ejercicios I.1 y I.2 (Figura 6) en la columna izquierda susodicha, no se respeta esta regla. Del primer ejemplo al siguiente ejemplo se hacen variar dos variables visuales diferentes y no una sola.

Con esta situación de exploración, no se trata entonces de asociar dos representaciones cognitivamente diferentes de un mismo objeto, sino de comprender cómo dos representaciones cognitivamente semejantes pueden por una sola diferencia, no inmediatamente evidente, representar dos objetos diferentes, es decir corresponder a dos representaciones netamente diferentes en otro registro. Son tales situaciones de exploración las que permiten distinguir las unidades de una representación que son significantes en un tipo de registro⁸.

⁸ Cuando la lengua constituye el registro de salida, como por ejemplo con los enunciados de problemas, el recurso en las representaciones intermediarias y transitorias puede ser necesario. Por ejemplo, para los problemas aditivos que han dado lugar a una abundante literatura, es necesario que este trabajo de discriminación de las unidades pertinentes del enunciado se haga con las representaciones bidimensionales (Damm, 1992). Pues también las variaciones importantes para la comprensión de los problemas aditivos no conciernen a las variaciones sobre la naturaleza de los números, como ha sido afirmado a menudo.

• *¿Cómo se supera la heterogeneidad de las representaciones en la unidad o en la unificación de una démarche de conocimiento?*

Toda démarche de conocimiento debe ser analizada bajo dos puntos de vista diferentes: el punto de vista epistemológico que considera las exigencias propias a los objetos de conocimiento y a los medios de su descubrimiento, y el punto de vista cognitivo que considera las exigencias relativas a las actividades que el sujeto debe ser capaz de cumplir para tener acceso a los objetos de conocimiento. Estos dos tipos de exigencias interfieren pero no se confunden.

Desde un punto de vista epistemológico, la conversión de las representaciones aparece a menudo como un cambio imprevisible pero no constituye por tanto un cambio inexplicable, por lo menos en matemáticas. Pues las conversiones son efectuadas siempre respecto a los tratamientos a poner en práctica para resolver un problema.

Dicho de otra manera, la conversión de las representaciones constituye una de las instancias heurísticas mayores en la resolución de problemas matemáticos. Y esto es por otra parte, lo que constituye el límite de todo intento por describir o explicar los métodos de resolución de un problema.

Desde un punto de vista cognitivo, la distancia que separa los contenidos de dos representaciones de un mismo objeto tiene en primer lugar al hecho de que las representaciones son producidas recurriendo a dos sistemas productores de representación que son heterogéneos. Es por esto que alguien no puede atravesar esta distancia, es decir verdaderamente reconocer el mismo objeto en dos representaciones en las que los contenidos son diferentes, hasta que una coordinación entre el funcionamiento de los dos sistemas de representación movilizados no ha comenzado a emplearse para ello.

La unificación cognitiva interna se hace al nivel profundo de la coordinación de los funcionamientos de los sistemas de representación que el sujeto puede movilizar. No depende de conceptos. Así, la conversión de las representaciones gráficas en escritura de ecuaciones, o de inequaciones, no depende del concepto de función, pues las representaciones gráficas permiten representar indiferentemente las relaciones que son funciones y las relaciones que no son funciones.

Toda conversión de representaciones semióticas, excepto los casos locales y poco frecuentes de congruencia entre el contenido de la representación de salida y el de la representación de llegada, presuponen el desarrollo de coordinaciones entre los

diferentes registros que se quieren movilizar.

Las dificultades a menudo radicales que la mayoría de los alumnos encuentran en el aprendizaje de las matemáticas indican la ausencia de tales coordinaciones. La mayoría de los alumnos quedan en una barrera frente a los registros de representación.

Se puede avanzar pues en la siguiente hipótesis. Todo acto de pensamiento depende de la sinergia entre los funcionamientos de varios sistemas productores de representaciones, aunque un solo sistema es movilizado explícitamente para producir o transformar las representaciones. El poder y la creatividad del pensamiento dependen de la variedad de los sistemas de representación que son puestos en sinergia. La originalidad del pensamiento matemático tiene al hecho que se apoya en la sola sinergia de los sistemas de representaciones semióticas.

El problema crucial de la modelización del funcionamiento del conocimiento y de su desarrollo en el sujeto humano

El análisis del funcionamiento cognitivo del pensamiento matemático y el papel esencial que juega la conversión de las representaciones semióticas, conduce inevitablemente a interrogarse sobre los diferentes

modelos posibles de las estructuras cognitivas del sujeto humano. En efecto, todo intento de modelización global tropieza con el problema crucial de las relaciones entre la conciencia y el funcionamiento no consciente de las estructuras cognitivas que constituyen el sujeto humano. Este problema, se encuentra cada vez que se conduce a hacer la pregunta: ¿cuál es el sujeto del acto de conocimiento? ¿Es el sujeto el agente consciente, es decir la fuente de iniciativa y de control de sus actos, o es el sujeto constituido por un conjunto orgánico de sistemas que determinan sus contenidos de conciencia, sin que sea consciente?

Cuando se trata de la actividad científica, y más particularmente, de la actividad matemática, esta pregunta puede ser formulada de manera más precisa, teniendo en cuenta el hecho de que el conocimiento implica una actividad de representación (Duval, 1998).

¿La conciencia (necesariamente actual) del sujeto es la fuente principal de las representaciones, es decir fija y administra los contenidos (todos los sistemas semióticos que no están en los códigos secundarios para transmitir un contenido mental puro), o sería sólo el lugar de emergencia de las representaciones, siendo producidas entonces por los sistemas que el funcionamiento evitaría?

Este es evidentemente un problema considerable que supera el mar-

co de este documento. Es sin embargo esencial, especialmente para el estudio de los procesos de adquisición de los conocimientos científicos y, más particularmente, para los conocimientos matemáticos.

Constituye el nudo de todos los debates sobre la pertinencia de una aproximación psicológica o cognitiva en el análisis de las démarches matemáticas y en los procesos de su aprendizaje. Ahora bien, todos los modelos del análisis del conocimiento, tanto aquéllos epistemo-filosóficos desarrollados desde Platón como los cognitivos desarrollados en referencia a la informática y a las neurociencias, se dividen según una elección fundamental:

- Bien sea privilegiar de entrada al sujeto consciente como agente o como «constructor» del conocimiento,
- Bien sea privilegiar los sistemas cognitivos infraconscientes porque su funcionamiento es el que elabora lo que aparece en la conciencia.

Pero, cualquiera que sea la elección hecha, todos estos modelos son los modelos Monistas. El problema crucial es pues saber si estos modelos pueden dar realmente cuenta de la complejidad de los fenómenos de comprensión y, particularmente, de los fenómenos de comprensión en matemáticas.

Dos tipos de modelización monistas del funcionamiento cognitivo

- *El conocimiento depende de actos que aumentan la iniciativa íntima y del control de la conciencia*

El problema que pone la dualidad entre la conciencia y las estructuras cognitivas no conscientes aparece ya, a través, de la distinción entre la mirada y la visión que Platón utiliza para explicar el paso de la opinión, o del error, al conocimiento, siendo comparado con el paso de la sombra a la claridad (República 508c-d, 518c-d,)*.

Lo que cada uno ve depende de dos cosas, en efecto: por un lado el sistema, órgano o «poder» (*dunamis*), que permite al cuerpo o al alma ver y, por otra parte, la orientación hacia (*eis, pros*) lo que constituye la mirada del cuerpo o del pensamiento. Pero puesto que «el poder de ver, cada uno la posee» al principio (518d 5), es la orientación de la mirada que se debe voltear (*stephein* 518c7), o transformar (*Metastephein* (518d 5)), para pasar de la opinión, o del error, al conocimiento de lo que es verdaderamente. Esta conversión de la mirada es un movimiento de todo el pensamiento (*sun holô* 518c 7-8).

* En el presente artículo se presentan fechas que no coinciden con el período del autor citado, pero se conservan tal cual como aparece en el texto original en francés de Raymond Duval. Nota del Director.

Poniendo así a la conversión en el centro del proceso de acceso al conocimiento, Platón hace entonces depender la actividad de conocimiento de las *démarches* conscientes del sujeto, y no del órgano, o de la facultad, que da el medio de conocer y que determina también la naturaleza del objeto conocido. Esta elección se ha impuesto a Platón porque, para él, el conocimiento matemático constituía por excelencia la experiencia del conocimiento (República 510c-d). En efecto, con el conocimiento matemático, no sólo se pasa de un visible siempre cambiante a un inteligible que permanece contra todo cambio, sino que se concibe, también, la experiencia que este paso depende únicamente de las *démarches* que realiza él mismo y no de un aporte de fuentes externas.

La sola pregunta de la educación (*paideia* 518b 6-7) es entonces saber si existe un arte (*techné*) para poner en práctica (*diaméchanéasthai*) la conversión. O para despertar por el cuestionamiento (República 524d); *Théétète* 155d 3).

En los *Regulae ad directionem ingenii*, Descartes (1963) ha propuesto un método que tiene el mismo objetivo: describir cómo accede la conciencia a un conocimiento «cierto e indudable» (Descartes, 1963, p. 80, regla II). Todo se apoya sobre lo que hace la esencia de la conciencia, la elección de la orientación de su atención: «todo el método reside en la puesta

en orden y la disposición de los objetos hacia los que hace falta girar la mirada del espíritu para descubrir...» (p. 100, regla V). Y la regla IX precisa el tipo de objeto hacia el cual «hace falta girar enteramente la mirada del espíritu» (p. 123).

Ahora bien, para Descartes, esta mirada del espíritu no puede ser instantánea y, por consiguiente sujeta, en su renovación, a las variaciones y a las intermitencias de la conciencia, cuando un conocimiento cierto e indudable exige por el contrario «un movimiento continuo y absolutamente ininterrumpido del pensamiento» (p. 108, regla VII).

En estas condiciones, «mantener nuestro pensamiento en el estado de atención» se convierte en esencial para el conocimiento (p. 129, Regla X), para poder superar justamente los límites de aprehensión de los registros instantáneos y su discontinuidad (Regla XI).

Dicho de otra manera, las operaciones cognitivas necesarias para hacer llegar la conciencia a un conocimiento indudable no pueden ser disociadas de su atención más viva. Las diez últimas reglas (Reglas XII-XXI) dan ejemplos de los ejercicios intelectuales correspondientes a este análisis. Se refieren a la resolución de problemas matemáticos. Se puede observar en otra parte la puesta en práctica de representaciones simbólicas, esquemáticas y figurales, muy variadas.

Refiriéndose tanto a los matemáticos Descartes, como Platón, se conduce a retener el mismo criterio inmanente para caracterizar el conocimiento: «siempre he considerado como la más grande voluptuosidad de estudio, no escuchar los razonamientos del prójimo, sino descubrirlos yo mismo con mis propios recursos» (p. 126, Regla X).

Husserl, que se interesó en primer lugar por el desarrollo de la lógica matemática y por las preguntas semióticas que esto plantea, ha sistematizado este análisis cartesiano, buscando en la sola «conciencia pura o trascendental» (Husserl, 1950, § 33, 108), el origen de la constitución de los objetos de conocimiento.

Antes que nada, los procesos cognitivos dependen de «este poder inherente de la esencia del Cogito, del acto como tal, este poder de tener alguna cosa bajo la mirada del espíritu (§37, p. 118). Pero esta mirada del espíritu no tiene nada homogéneo como en Descartes: «esta mirada del yo en dirección de alguna cosa difiere según el tipo de acto (percepción, imaginación, recuerdo, juicio...)» (*ibíd.*).

Husserl se condujo así a atribuir a la conciencia pura los actos que se atribuyen clásicamente a los sistemas que desempeñan las diferentes funciones necesarias en la actividad cognitiva. La razón de ello es que cada tipo de acto (percepción, recuerdo, juicio) abre un mundo de fenómenos y de

objetos que él propuso y que, según la esencia intencional de las experiencias de conciencia, los diferentes tipos de actos no pueden ser distinguidos a partir de los objetos sobre los cuales la mirada se dirige (§92, 318).

Así, la «conversión de la mirada» (§35, p. 113), se pone más compleja pues debe referirse a la modalidad de aparecer de los objetos y no sólo a la diversidad de los objetos. Es por esto que la noción de «modificación» de modalidad, o de modificación de experiencia, se convierte en más fundamental que la de «conversión de la mirada», la que no plantea más que el método fenomenológico de observación (§103-106).

El proyecto husserliano de fundar todo conocimiento apodíctico en los actos de la conciencia es disminuido a un estado de programa irrealizable. Pues, subordinando «lo dado natural» para todo conocimiento al solo tipo de acto de la «percepción externa» (§70, 224,) no se puede evitar, como se constata en Husserl mismo y en todos los que se han valido de él, en la clausura de una percepción⁹.

• *El conocimiento es el resultado de transformaciones sucesivas de «data» o de «informaciones» a través de una organización jerarquizada de sistemas*

⁹ Husserl hace sin embargo una excepción para la geometría, que se levanta del plano de la imaginación, en la medida en que el geómetra debe tener «la incomparable libertad de poder cambiar arbitrariamente la forma de sus figuras ficticias...» (§70, 225). Pero Husserl no diferencia esta libertad imaginaria de la del artista.

El segundo tipo de modelización plantea otra problemática. No se trata más de describir cómo puede llegar cada sujeto humano, por sí mismo, a un conocimiento verdadero, indudable o científico, sino de aclarar los estructuras requeridas para que todo sujeto humano pueda adquirir el conocimiento del mundo donde vive y así adaptarse.

Se trata entonces de describir el desarrollo interno que puede producir este conocimiento. Esto exige que se señalen en primer lugar las diferentes funciones necesarias para el desarrollo completo de este proceso: conseguir los datos o las informaciones, mantenerlas siempre disponibles, combinarlas con otras, inferir las novedades, etcétera.

Se puede deducir entonces la existencia de un sistema o de una estructura propia a cada una de estas funciones. La asociación de una estructura a una función ha dado lugar a diferentes denominaciones: «poder», «facultad», «instancia», y más recientemente «módulo». Estas estructuras son las estructuras de las que el sujeto dispone al nacimiento.

La primera modelización de este tipo ha sido propuesta por Aristóteles

en el *Peri Psuchés* (1966). El desarrollo del conocimiento parte de las sensaciones. Éstas se caracterizan a la vez por la materialidad y por la individualidad de las formas percibidas que manifiestan los objetos.

Dos tipos de procesos son tomados entonces en cuenta para explicar la producción de un conocimiento: separar (*kôrizein*) las formas de la materia (*hylé*), con las que se confunden en la sensación, es decir cumplir su abstracción (*aphairesis*), y pasar de una potencialidad a su realización bajo el efecto de una instancia en acto. Estos dos tipos de procesos van a conducir a Aristóteles a distinguir cuatro facultades ó *dynamis* que sitúa en tres niveles diferentes en la producción de un conocimiento.

Están antes que nada los dos niveles que son como los términos extremos del proceso de separación: por un lado, *los sentidos* que captan sin ninguna separación y, por otra parte, *el intelecto* que opera solamente sobre lo que ha sido separado, es decir sobre lo que es abstraído y general.

Está luego la determinación de un nivel intermedio de separación, que es el de la *imaginación* (fantasía). La imaginación presupone la sensación, aunque no depende más de la presencia del objeto sensible. Dicho de otra manera, su función es de servir de soporte a las *démarches* discursivas del intelecto suministrando las formas desmaterializadas

pero que guardan todavía la particularidad de la concreta sensibilidad (431a 14-17)¹⁰.

En fin, el segundo principio conduce a distinguir dos facultades al nivel del intelecto: el *intelecto pasivo* y el *intelecto agente* (429a 30 b10; 430 a 10-17). Pues para llevar hasta el fin el proceso de abstracción se comenzaba con la imaginación, es decir, para hacer actualizar el carácter general o universal de las formas ya desmaterializadas en imágenes, una instancia en acto es necesaria, y esta instancia no debe ser otra que aquella que coge como contenido lo que la primera ha abstraído.

Hace falta, también notar que Aristóteles (2005) ha esbozado una modelización más empírica que prefigura los análisis desarrollados por Locke y por Condillac. En este análisis, es la memoria, la que cumple una función asociativa, y no la imaginación la que suministra un soporte concreto a los conceptos, que se convierten en esenciales (p.337-339, 99b35-100 ont 9).

¹⁰ En el análisis de esta facultad, como en el análisis de todas las que intervienen en la producción de un conocimiento, Aristóteles recurre también a un criterio puramente epistemológico, el de la verdad y el del error. No lo retenemos aquí, pues no permite verdaderamente distinguir la imaginación y la percepción, y no remite a ningún desarrollo. Éste es por otra parte el criterio que ha sido privilegiado para determinar los procesos de acceso de la conciencia al conocimiento. Lo que no es el caso en Aristóteles.

Este tipo de modelización conduce entonces esencialmente a un análisis en el cual es el proceso de separación abstractivo el que está en el corazón del funcionamiento cognitivo y no la conversión de la mirada como en Platón o la mirada atenta del espíritu como en Descartes.

La segunda modelización de este tipo ha sido propuesta por Kant en la *Crítica de la Razón pura* (1956). Está muy cerca de la de Aristóteles y sin embargo se sitúa en los antípodas. Como la de Aristóteles, distingue tres niveles en el proceso productor de un conocimiento científico (físico o matemático): el de la sensibilidad, el de la imaginación y el del intelecto.

Distingue también para el intelecto dos facultades, el entendimiento (*Verstand*), y la razón, (*Vernunft*) con funciones un poco análogas: el entendimiento corresponde al conjunto de todos los conceptos a priori posibles, mientras que la razón es una instancia dinámica que exige ponerlos en acto sin ninguna limitación.

Sin embargo esta modelización está en los antípodas de Aristóteles, pues, invierte, para una gran parte, el sentido del desarrollo del conocimiento que es considerado aquí más como un proceso de organización de datos que como un proceso de separación: *los conceptos organizadores* de la experiencia no vienen de los sentidos, y las relaciones espacio-temporales que son constitutivas de toda

percepción, no pertenecen a las sensaciones sino a la facultad receptiva del espíritu (*Gemuth*) y constituyen su sensibilidad a priori. De hecho, en Kant, la modelización cognitiva tiene por fin resolver un problema epistemológico. Ésta es por otra parte una démarche análoga que ha comandado todo el desarrollo de la psicología genética de Piaget (1924).

La modelización kantiana conduce a un análisis en el que está la esquematización, que está el corazón del funcionamiento cognitivo del pensamiento. La esquematización es la función esencial de la imaginación, y constituye un proceso inverso del proceso aristotélico de abstracción pues va de los conceptos al dato sensible. Y, a diferencia de Aristóteles, Kant, debe reconocer un lugar a la conciencia, como percepción trascendental -no puede desconocer la revolución cartesiana-, esto es solamente para darle un papel puramente formal de unificación subjetiva a la diversidad de experiencias.

Nuevas familias de modelización de este tipo han aparecido en la confluencia de innovaciones teóricas o metodológicas: la introducción en psicología de la noción de información, viene a modificar la del estímulo (Miller, 1956), y la de «flujo de informaciones» que abre a la idea de los desarrollos psicológicos, como los procesos de comunicación entre sistemas (Broadbent, 1958), el mé-

todo de los tiempos de reacción (Sternberg, 1966), la simulación por ordenador de los resultados humanos en materia de reconocimiento visual de formas o de traducción (1960), los análisis generativos y transformacionales de la lengua (Chomsky, 1957), y más recientemente las nuevas técnicas que permiten estudiar las variaciones de la actividad cerebral, etc.

Sin embargo, aunque constituyan una ruptura respecto a los modelos hechos en términos de «facultades», siguen poniendo en práctica el mismo tipo de análisis, es decir un análisis fundado sobre la pareja (función, estructura), cada pareja da lugar a una operación específica en el proceso de elaboración de un conocimiento.

Este proceso aquí se convierte en el proceso de tratamiento de información por transformaciones sucesivas. El fin de este análisis permanece siempre en la reconstitución del encadenamiento de las operaciones que van de una fuente de datos hasta la producción de un estado más complejo que se llama el conocimiento que, a su vuelta, se convierte en fuente de informaciones o de resultados. Tres puntos caracterizan las modelizaciones recientes de la actividad cognitiva:

1) El papel primordial suministrado a la noción de tratamiento de información, en relación con la de

«computing» (Pylyshyn, 1990). Las informaciones son los datos que se pueden convertir en binarios, sobre los que se fija todo el desarrollo del conocimiento, desde el momento de su entrada en un sistema (input) que tiene cierta función, y por donde salen modificadas (output) para luego entrar en otro sistema y finalmente producir una respuesta. Subrayemos aquí que la ventaja de esta aproximación es una descripción que puede ser fácilmente puesta en correspondencia con las estructuras orgánicas y los circuitos de la actividad cerebral. Lo que permite homogeneizar los modos de explicación psicológica y neurológica.

(2) Entre todas las funciones requeridas para la modelización de este proceso, el almacenamiento de datos es la función primordial. Esto ha conducido a distinguir y a multiplicar los tipos de memorias, bien sea para asegurar el mantenimiento de unidades de informaciones frente a un flujo que viene a ocultarlas, o para constituir las «bases» de los conocimientos siempre disponibles para los tratamientos actualmente en curso.

(3) Uno de los problemas mayores que plantea la entrada de las informaciones en un sistema es el de su codificación o, más precisamente, de su codificación en este sistema.

Así una de las preguntas más debatidas estos últimos decenios ha sido la de la «representación de los

conocimientos», principalmente en la memoria a largo plazo.

Uno de los puntos más espinosos era saber si las informaciones visuales pudieran o no ser codificadas en la memoria como las informaciones discursivas, es decir bajo una forma preposicional. Notemos aquí el carácter equívoco o por lo menos paradójico de la expresión «representación de los conocimientos»: el conocimiento es de naturaleza representativa, las representaciones de conocimientos son las representaciones de representaciones. Pero en esta repetición, de la palabra «representación» ¿no se vuelve equívoca? Tiene el mismo sentido cuando se refiere a una codificación proposicional binaria y se escapa de la conciencia y cuando se refiere a los contenidos de la conciencia que varían en modalidad y en determinación informativa, y ¿cada uno remite a un objeto o bien ha vivido como la presencia de este objeto?

Si se consideran las modelizaciones recientes trayéndolas a la actividad cognitiva global del individuo, aparecen como modelos extremadamente locales -o ultra-especializados. En efecto, en lugar de modelar las estructuras cognitivas con objeto de poder englobar las dimensiones de la afectividad y de los comportamientos éticos, se enfocan sobre la «arquitectura» (Anderson, 1983) de los sistemas movilizados para los resultados que corresponden

sólo a una o varias categorías de tareas particulares.

Estos modelos se refieren exclusivamente a los procesos estructurados que «preceden» de alguna manera lo que viene a la conciencia, porque estos procesos se extienden a escalas de duración mucho más pequeñas que aquellos donde la conciencia puede ser conscientemente fuente de sus actos. Son sus funcionamientos en paralelo y su organización sinérgica los que producen estos contenidos de conciencia donde la emergencia aparece inmediata (Schneider & Shiffrin, 1977).

Notemos aquí que el adjetivo «mental» utilizado para traducir los términos ingleses «mind» y «mental», lengua en la que estos modelos cognitivos han sido concebidos, son puestos totalmente neutros respecto al hecho de que el sujeto tenga o no tenga conciencia de ello. Hemos pasado entonces a los antípodas de lo que significaba el término en latín «mens» en los análisis que Augustín (1955) hacía del espíritu y del *Cogito*, significado que ha pasado en todos los análisis clásicos del conocimiento, desde Descartes hasta Husserl. Pero nada puede expresar mejor este deslizamiento equívoco de la palabra «mental», cuando se pasa de modelos donde la conciencia es privilegiada a los modelos donde no es más que un reflejo superficial y terminal, esta fórmula de Johnson-Laird (1983): «*Thinking is computing*».

El conocimiento: ¿una actividad que plantea en primer lugar, la conciencia o el resultado de un conjunto de procesos infraconcientes?

La alternativa puede parecer abrupta. Resume sin embargo la oposición entre los dos tipos de modelización del funcionamiento cognitivo del sujeto humano. Estos dos tipos de modelización disminuyen de entrada la dualidad conciencia/funcionamiento infraconciente de un conjunto de estructuras cognitivas, jerarquizadas o sencillamente secuencializadas, a uno de los dos costados de la actividad cognitiva humana. Sin embargo esta dualidad nos pone en presencia de dos órdenes de fenómenos que, de cierta manera, son irreductibles el uno al otro.

• *La irreductibilidad de esta dualidad y el problema de la relación entre conciencia y procesos infraconcientes.*

Abordando la pregunta de la explicación en psicología, Piaget había señalado ya «una dualidad fundamental» entre un «funcionamiento nervioso acompañado de la conciencia» y un «funcionamiento sin conciencia», o aún entre lo que la conciencia percibe y lo que se produce causalmente al nivel del funcionamiento de las organizaciones cerebrales (Piaget, 1967a, 153). La explica por la irreductibilidad de los dos tipos de relación que caracterizarían

estos dos órdenes de fenómenos: «la relación entre significados (siendo), bajo una forma muy general, una relación de implicación», las relaciones entre los «estados de conciencia» son las relaciones de implicación, mientras que las relaciones entre los estados de un sistema que funciona «sin conciencia» son las relaciones de causalidad (Piaget, 1967a, 158).

Eso plantea evidentemente el problema de la relación entre la conciencia y todos los procesos neuropsicológicos que escapan de la conciencia, es decir los que escapan no sólo a su iniciativa y a su control sino a sus capacidades de percepción y de discernimiento. Piaget estima que esta relación consiste en un «isomorfismo entre la causalidad y la implicación», y evoca, para justificar esta tesis, el isomorfismo entre las démarches de un matemático que establece un resultado y los procesos de una máquina que calcula este mismo resultado (1967a, 158-159).

Sin embargo el desarrollo de las estructuras cognitivas conscientes lo conduce a matizar esta tesis, que no permite tener en cuenta la novedad irreducible de cada estadio del desarrollo intelectual consciente del niño respecto a los estadios anteriores. En *Biologie y Connaissance* Piaget no habla más que de un «isomorfismo parcial» (1967b, 73-74).

Es totalmente en una perspectiva diferente que los cognitivistas, como

por ejemplo Fodor (1986), han intentado plantear el problema de las relaciones entre la conciencia y los funcionamientos neurológicos infraconcientes. Dos ideas de ello comandan el análisis.

Antes que nada, las creencias y los deseos son los fenómenos específicos de la conciencia porque orientan el sujeto hacia un objeto, este objeto se vuelve así un contenido de conciencia, es decir, un contenido de creencia o de deseo. Luego, hay en el lenguaje una estructura que refleja la orientación hacia un objeto propio, hacia los fenómenos conscientes: esta es la estructura sintáctica que articula lo que se designa desde Russell «actitud proposicional» y un contenido proposicional. Esta estructura sería necesaria para poder expresar los deseos y las creencias. A partir de ahí se puede postular un isomorfismo entre la relación intencional de un sujeto a un objeto y la relación semántica de una actitud proposicional a un contenido proposicional. Lo que Fodor enuncia así: «Estimo que la esencia del estilo neocartesiano¹¹ en psicología es pensar que hace falta explicar la estructura mental haciendo ante todo referencia al contenido proposicional de los estados mentales» (1986, p. 17).

En este tipo de análisis, la noción de conciencia es determinada por un

contenido que puede ser calificado indistintamente de «mental» o de «semántico». Y los contenidos, que determinan la conciencia como fenómeno de creencia o de deseo, se convierten en el interfaz entre estos dos polos reales que son el sujeto, como organismo o como los procesos neurológicos del cerebro, y el mundo exterior. Este interfaz resulta de procesos neurológicos, infraconcientes, que constituyen el sujeto como parte del mundo.

Hay una gran similitud entre la problemática de Piaget y la de Fodor en su análisis de las relaciones entre la conciencia y todos los procesos infraconcientes que la subdirigen. Se puede observar la misma operación de reducción de la conciencia en las estructuras lógicas o en las estructuras semánticas por las cuales se modela no el conocimiento sino el solo funcionamiento discursivo del pensamiento (diavoia). Siendo hecha esta primera reducción de la conciencia en las estructuras lógicas o semánticas, la tesis del isomorfismo entre la conciencia y los desarrollos cerebrales puede ser avanzada luego. Se habla entonces de «paralelismo» o de «causalidad» para definir la relación entre los procesos cerebrales y los contenidos semánticos de la conciencia, no cambia más nada.

• *Los puntos cruciales para una modelización del funcionamiento cognitivo del sujeto humano*

Las representaciones semióticas tienen un papel central en el funcionamiento cognitivo del pensamiento matemático. Eso tiene no sólo al hecho de que los objetos matemáticos no son accesibles por fuera de las representaciones semióticas (p. 67), sino sobre todo al hecho de que los procesos de pensamiento se realizan por dos tipos de transformaciones de las representaciones movilizadas (conversión y tratamiento).

El análisis de estos dos tipos de transformaciones obliga a considerar las representaciones no por ellas mismas y sus casos particulares, sino por los sistemas que permiten producir las. Ahora el papel jugado por la variedad de los registros de representación semiótica utilizados en las démarches matemáticas no es del todo tomado en cuenta en los dos tipos de modelización que tenemos que evocar. ¿Cómo situar esta *semiósis* a los dos lados de toda actividad cognitiva humana, la conciencia y el funcionamiento infraconciente de un conjunto de estructuras cognitivas subyacentes a la conciencia? Toda respuesta a esta pregunta depende del análisis que se hace de los fenómenos de representación. Y aquí se toman en cuenta los siguientes datos que se revelan cruciales.

(P.1) la naturaleza de una representación depende del sistema particular que la produce. Eso quiere decir que la clasificación de las representaciones se hace respecto a los dife-

rentes sistemas que las producen, y no en función de la existencia o de la ausencia de un parecido entre el contenido de la representación y el objeto representado (Duval, 1999).

(P. 2) hay dos grandes tipos de sistemas productores de representación: los sistemas no semióticos, (físicos u orgánicos), y los sistemas semióticos. Dos diferencias radicales las separan. La primera se caracteriza porque la producción de una representación semiótica es necesariamente intencional, *mientras que* la producción de una representación no semiótica es a menudo automática y no intencional. La segunda se caracteriza por la naturaleza de la relación que existe entre el contenido de la representación producida y el objeto representado. En una representación no semiótica la relación entre el objeto representado y el contenido de la representación es una relación de causalidad, por el sistema físico o neurológico que la produce, mientras que en una representación semiótica no hay ninguna relación de causalidad del objeto representado al contenido representado. En efecto, cada uno de los elementos que forman el contenido de una representación semiótica plantean una elección de éste que la produce y la relación entre el contenido compuesto o construido y el objeto representado puede ser sólo una relación de referencia (Duval, 2006a).

¹¹ Más bien de néo-cartesianismo, sería más exacto que hablar de néo-occamisme (Panaccio, 1991).

(P. 3) la distinción entre el contenido de una representación y el objeto representado no es posible más que para las representaciones producidas intencionalmente. No tiene sentido para las representaciones de conocimientos en los sistemas en los que el funcionamiento escapa de todo control consciente. Estas «representaciones no conscientes» no remiten a ningún objeto (Duval, 1995). Sin embargo para que un sujeto pueda no confundir el contenido de una representación con el objeto representado, debe tener un acceso posible al objeto por sí mismo, independientemente de esta representación. Lo que constituye un desafío para las matemáticas.

(P. 4) en toda producción intencional de representaciones semióticas, hay dos aspectos que no se deben confundir: la naturaleza de la representación producida que depende del sistema semiótico utilizado y el modo fenomenológico de la producción (Duval, 2006b).

Así, para el lenguaje, el modo fenomenológico puede ser interno (mental) o externo, (vocal o gráfico) (Duval 2006b). Muchas representaciones llamadas «mentales» son en efecto las representaciones semióticas producidas mentalmente.

(P. 5) la conciencia no puede ser considerada como la fuente productora de las representaciones de los objetos que trata, hasta de los semióticos, de los que elige y con-

trola las transformaciones. Esta producción refleja la variedad de los sistemas de producción, semióticos o no semióticos que subdirigen toda actividad consciente. Y esta producción plantea una espontaneidad que, para una gran parte, escapa a la iniciativa de la conciencia, un poco como con la palabra, aunque luego su desarrollo cae bajo su control.

(P. 6) son los sistemas semióticos, y no sólo la intensidad y la continuidad de la atención, como Descartes lo afirmaba (1963, 133 Regla XI) los que «aumentan» la capacidad de aprehensión del pensamiento, más allá de las limitaciones de toda mirada intuitiva.

Los registros de representaciones semióticas que el desarrollo o el enriquecimiento han acompañado en el progreso y la expansión de las matemáticas a lo largo de la historia constituyen de cierto modo las estructuras cognitivas secundarias. A diferencia de las estructuras cognitivas primarias que responden a las funciones cognitivas fundamentales empleadas desde el nacimiento, su apropiación por los individuos constituye una de las posturas educativas mayores de la transmisión cultural. Pero esta apropiación no basta. Su coordinación es decisiva. Pues todo acto de pensamiento depende de la sinergia entre el funcionamiento de varios sistemas productores de representaciones,

aunque un sólo sistema es explícitamente movilizado para producir o transformar las representaciones.

De manera más general, si quiere describirse la conciencia desde un punto de vista cognitivo, es esencial considerarla previamente como la sinergia de los diferentes órganos de los sentidos. Notamos que Aristóteles se había adelantado en esta dirección abordando la cuestión delicada de un *sensorium commune* para la cual la presencia sensible del mundo cercano sería tomada de entrada y funcionaría como una «instancia única de discernimiento» de las diferentes percepciones sensoriales lo mismo que de sus cualidades comunes de tamaño, de extensión o de duración (1966, 426b9-427a 15). La conciencia vigila, desde su despertar; es el acto sinérgico primero de este *sensorium commune* que precede de alguna manera a las sensaciones particulares de cada sentido.

Merleau-Ponty (1945) encontró y desarrolló esta tesis cognitiva en sus descripciones fenomenológicas de la «percepción», esta palabra se vuelve en él el equivalente funcional del *sensorium commune*.

Se ve así, que la capacidad cognitiva de la conciencia depende a la vez de los sistemas no semióticos infraconscientes, que escapan de su control pero que determinan los «datos inmediatos» de su funcionamiento, y de los sistemas semióticos en

donde el funcionamiento depende totalmente de sus elecciones y de su control (P.2).

Igualmente, la actividad consciente humana implica de un modo o de otro, la movilización de registros de representaciones semióticas (P.3 y P.4), sin que sean sin embargo totalmente la fuente del contenido de las representaciones que implican (P.5). Son los sistemas de representación semiótica de los que se dispone los que le dan su poder discursivo e imaginativo (o inventivo) de tratamiento (P.6). Pero el desarrollo de esta actividad implica una coordinación entre los múltiples sistemas de representaciones, no semióticas y semióticas, que constituyen el sujeto. Sin tal coordinación, ni este tipo de transformación que es la conversión de las representaciones, ni la distinción entre el contenido de una representación y el objeto representado, serían posibles.

Es pues por el desarrollo de sinergias entre todas estas estructuras, primarias y secundarias, que la conciencia llega a su autonomía, es decir a la iniciativa y al control del pensamiento, lo mismo que a todas las démarches de conocimiento. El desarrollo de sinergias depende de las múltiples coordinaciones a adquirir. Ahora bien, este tipo de adquisición se sitúa en el punto de subducción donde una toma de conciencia modifica y enriquece todos los procesos

infraconcientes que subdirigen la conciencia (actual) de un sujeto. Así la actividad consciente de cada sujeto progresa como en una interacción circular entre ella y todos los funcionamientos neuropsicológicos infraconcientes que aseguran la espontaneidad.

Conclusión

Las matemáticas, que se encuentran en el corazón de todo desarrollo de conocimientos científicos, constituyen un terreno privilegiado para el análisis de los procesos cognitivos del pensamiento.

El análisis de las démarches de pensamiento en matemáticas, en referencia a los problemas complejos de aprendizaje y de comprensión que se fijan en la mayoría de los alumnos, ponen en evidencia el papel central que juegan las representaciones semióticas, lo mismo que los dos tipos de transformaciones propias a las representaciones semióticas. Y, lo que constituye el umbral más difícil a superar es el reconocimiento de un mismo objeto a través de representaciones totalmente diferentes porque son producidas en sistemas heterogéneos.

Este tipo de transformación es fundamental y complejo a la vez. No se puede reducirlo ni a las operaciones de codificación, ni a una traducción. Su característica esencial es de no poder ser definido por ninguna regla, con motivo de la heterogeneidad

cognitiva de los sistemas de representación entre los cuáles se realiza el paso. Eso, sin embargo, no marca una debilidad, o un paso ciego para el conocimiento, eso constituye el dinamismo creador del pensamiento. Así, subyacente a la unidad de una démarche matemática, está la puesta en sinergia de sistemas heterogéneos y autónomos de representación que guardan cada uno el poder de tratamiento que les es propio.

La palabra «conversión» parece el término más apropiado para designar este tipo de transformación. Esta palabra connota un cambio completo por naturaleza o aún el paso de un contrario al otro: *in naturam aliam converti*, o *contraria convertuntur*, decía Cicerón.

Pero detrás de la palabra francesa o la palabra en latín, hay dos palabras griegas: METAstrophé (República, 518d5, 525c, 532b), y METAnoia como en el Nuevo Testamento, por ejemplo. Estas dos palabras, tienen el mismo prefijo que no se escucha del todo en el vocablo francés. Más fuerte que la palabra en latín, su prefijo evoca el salto, la ruptura y la superación que de ello resulta. Toda la cuestión consiste en saber cómo se realiza. Y allí, las palabras no remiten más a un concepto sino a una teoría, o del conocimiento, o del sujeto humano.

En el marco de nuestro análisis, es evidente que hemos adoptado la

conversión como *métastrophé*, pues esta palabra griega está atada explícitamente a una concepción del conocimiento como una actividad que depende totalmente de la iniciativa íntima y del control de la conciencia, la que se refiere en primer lugar a la elección de su orientación y a sus capacidades de discernimiento en medio de una multitud de fenómenos, de una variación de situaciones, de un exceso de informaciones o de un juego de apariencias, que se convierten en continuas. Hemos podido seguir así la declinación de la expresión «conversión del registro» de Platón a Husserl. Notamos que todas estas problemáticas entran en un mismo proyecto: definir las condiciones o las fases de una progresión ideal en el acceso de la conciencia al conocimiento. Se trata entonces de describir un *itinerarium mentis in...* y no un *ideal en el acceso de la conciencia al conocimiento*. La característica de estas problemáticas de formación de la conciencia es el no separar las exigencias epistemológicas y los procesos cognitivos que permiten contestarlo. De cierta manera, la palabra «conversión» remite al problema educativo, nunca resuelto y responde a la siguiente exigencia formulada por Platón: que toda adquisición sea fundada en una comprensión previa por sí mismo.

Pero hemos comparado esta concepción del conocimiento con otro tipo de análisis más centrado sobre

los procesos de elaboración del conocimiento. Allí el recurso al término «conversión» no tiene más este sentido, entonces esta palabra designa una codificación compleja pues hace pasar de representaciones analógicas de las que el contenido no es descriptible, a representaciones digitales de las que el contenido es discreto.

En efecto, este otro tipo de modelización diverge de los precedentes en dos puntos fundamentales. Antes que nada, se limita a los solos desarrollos cognitivos, haciendo abstracción de las exigencias epistemológicas de verdad o de error que remiten necesariamente a las exigencias propias en un dominio de conocimiento, como las matemáticas, la física, etcétera. Luego, y sobre todo, la actividad de conocimiento no es considerada más respecto a la conciencia del sujeto, sino respecto a un conjunto de estructuras de las que el funcionamiento es independiente de la conciencia y le escapa.

Estos sistemas llenan las funciones cognitivas diferentes, aunque conduzcan todos a la producción de representaciones que les son específicas. En esta problemática, la conciencia aparece como la sinergia de un conjunto de sistemas productores de representación. Este tipo de problemática es externa a toda pre-ocupación educativa de adquisición de conocimientos.

Hablando de conversión de las representaciones semióticas como uno de los dos procesos fundamentales del pensamiento, entramos evidentemente más en este segundo tipo de modelización que en el primero. Pues la conversión de las representaciones semióticas no es para nada la misma cosa que la conversión del registro. Pero, al mismo tiempo, pensamos mantener lo que hace el interés y la necesidad del primer tipo de modelización, donde las condiciones cognitivas no son separadas nunca de las exigencias epistemológicas de un conocimiento verdadero.

Es la toma en cuenta de las exigencias epistemológicas en matemáticas lo que nos ha conducido a reconocer el papel crucial de la heterogeneidad de los sistemas de representaciones semióticas y de su coordinación en el funcionamiento cognitivo del pensamiento humano. La postura de la educación es entonces favorecer la coordinación de los múltiples sistemas productores de representaciones, no semióticas y semióticas, para desarrollar las capacidades de pensamiento de la conciencia. Esta es la condición para el ideal de toda formación: el acceso de cada uno a una comprensión por sí mismo.

Permanece, la conversión como *métanoia*, la palabra que toma enton-

ces una resonancia más moral o más espiritual que cognitiva (Hadot, 1987). ¿Qué la relaciona con la conversión como *metastrophé*? Puede cuestionarse sobre la pertinencia de esta pregunta, pero no se puede evitar ser golpeado por el hecho que todo proyecto de educación a la «ciudadanía» requiere de cierta manera alguna cosa que plantea más la *métanoia* que la *métastrophé*.

Se puede observar en otra parte que en los modelos cognitivos clásicos, de Platón a Kant, la jerarquía establecida entre las diferentes facultades del alma responde en efecto más a una exigencia ética que a una exigencia cognitiva de secuencialización de los diferentes procesos cognitivos: el de ser dueño de sí mismo, es decir, contener sus deseos (Platón, 1997), o el de «determinar sólo por las leyes que se dan por la razón misma» (Kant, 1976).

La confianza puesta en el desarrollo de la racionalidad para desarrollar la conciencia de la necesidad del respeto de reglas comunes es la prolongación de ello. Pero eso remite a postular un isomorfismo entre el desarrollo del conocimiento, la estructuración efectiva de los individuos y los fines por los cuales su existencia toma sentido ante sus ojos. ¿No sería cuestión de reducir la *métanoia* a una simple conversión del registro?

Bibliografía

- Augustin, (Saint) (1955). *De Trinitate*. Paris: Institut d'Études Augustiniennes.
- Anderson, J.R. (1983). *Language Memory and Thought*. New York: John Wiley and Sons.
- Aristóteles, (1966). *De l'âme* (tr. E. Barbotin). Paris: « Les Belles Lettres ».
- Aristóteles (2005). *Seconds analytiques* (tr. P. Pellegrin). Paris: GF Flammarion.
- Brodbent, D.E. (1958). *Perception and communication*. New York: Pergamon Press.
- Chomsky, N. (1957). *Syntactic structures*. The Hague: Mouton & Co.
- Damm, R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Thèse ULP, Strasbourg: IREM.
- Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et Dédalles*. Paris: Seuil.
- Denis, M. (1989). *Image et cognition*. Paris: P.U.F.
- Descartes, R. (1963). *Oeuvres philosophiques (1618-1637) I*. Paris: Garnier.
- Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Peter Lang.
- Duval, R. (1998). *Signe et objet I, II*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 6, 139-196.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55.
- Duval, R. (2006a). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe colloque de la COPIRELEM*. IREM: Strasbourg, 67-89.
- Fodor, J. (1986). *La modularité de l'esprit* (tr. Gerschenfeld). Paris: Éditions de Minuit.
- Grugeon, B. (1996). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: BIP et Première G*. Université Paris VII: Thèse.
- Hadot P. (1987). *Exercices spirituels et philosophie antique*. Paris: Études Augustiniennes.
- Husserl, E. (1950. (1928)). *Idées directrices pour une phénoménologie* (Tr. P. Ricoeur). Paris: Gallimard.
- Jakobson, R. (1963) *Essais de linguistique générale*. Paris: Éditions de Minuit

- Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental Models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kant, E. (1956). *Kritik der reinen Vernunft*. Hamburg: Felix Meiner.
- Kant, E (1976) *Critique de la raison pratique* (tr. Picavet). Paris: P.U.F.
- Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63, 81-97.
- Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception*. Paris: Gallimard.
- Merleau-Ponty, M. (1960). *Signes*. Paris: Gallimard.
- Mollet-Petit, F. & alii (1992). *Maths 4ème IREM-Strasbourg*. Paris: Istra.
- Nowakowski, C. & Roux A. (1994). *Histoire des systèmes de télécommunication*. Paris: Technique et Documentation-Lavoisier.
- Panaccio, C. (1991). *Les mots, les concepts et les choses. La sémantique de Guillaume d'Occam et le nominalisme d'aujourd'hui*. Paris: Bellarmin & Vrin.
- Piaget, J. (1924). L'expérience humaine et la causalité physique de L. Brunschvicg. *Journal de psychologie*, 24, pp. 586-607.
- Piaget, J. (1967a). L'explication en psychologie et le parallélisme psychophysique. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds.) *Traité de Psychologie expérimentale I*. (pp. 123-162).
- Piaget, J. (1967b). *Biologie et connaissance*. Paris: Gallimard.
- Platon (1997). *Gorgias*. Paris: Les Belles Lettres.
- Platon (2002). *La République* (tr. G. Leroux). Paris: GF Flammarion.
- Pylyshyn, Z.W. (1990). Computing in Cognitive Science. In M.I. Posner (Ed.) *Foundations of Cognitive Science* (pp. 51-91). Cambridge Massachusetts: M.I.T. Press.
- Vergnaud, G., & Durand C., (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, 36, 28-43.
- Vygotski, L.S. (1985 (1934)). *Pensée et langage*. Paris: Editions Sociales.



¡Maestros, escribamos de lo nuestro!

